
UC-NRLF
C 2 968 950

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND IV. Nro. 1.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. I.

Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs.

Von

K. Schwarzschild.

Mit 6 Figuren im Text.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1905.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU GÖTTINGEN.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.

NEUE FOLGE. BAND IV.

AUS DEN JAHREN 1905—1906.



BERLIN.
WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.
1906.

INHALT.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND IV. Nro. 1.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. I.

Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs.

Von

K. Schwarzschild.

Mit 6 Figuren im Text.



Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1905.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. I.

Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 22. Januar 1905.

§ 1. Einleitung.

1. Die gegenwärtige Mitteilung giebt eine Art allgemeiner Einleitung in die Fehlertheorie optischer Systeme mit der Absicht, einerseits dem Leser, der diesem Gegenstand ferner steht, einen gedrängten Ueberblick über das Gebiet zu vermitteln, andrerseits dem Verfasser bei den später folgenden Untersuchungen den Hinweis auf fremde Litteratur zu ersparen. Die Darstellung stützt sich auf die von Hamilton eingeführte „charakteristische Funktion", welche ich mit Herrn Bruns als „Eikonal" bezeichnen werde. Ich möchte dabei zeigen, dass sich auch der praktische rechnende Optiker nicht vor dem Eikonal als etwas Hochtheoretischem zu fürchten braucht, dass man von dem Eikonalbegriff aus vielmehr sehr bequem grade zu den praktisch wichtigsten Sätzen, insbesondere den Seidel'schen Formeln, gelangen kann. Hamilton selbst ist sich dieser Anwendbarkeit seiner Theoreme sehr wohl bewusst gewesen, hat aber die Untersuchung nur für einige ganz einfache Fälle einzelner Linsen bei axialem Objektpunkt wirklich durchgeführt oder wenigstens publiziert. Die Ableitung der allgemeinen Rechenformeln direkt aus dem Eikonal scheint nirgends erfolgt zu sein. Es mag dies zum Teil auch daran gelegen haben, dass man in der sog. Elimination der Zwischenvariabeln Schwierigkeiten fand, welche indessen durch die Einführung der Seidel'schen Variabeln und des Seidel'schen Eikonals (unten Nr. 5. 6) einfach überwunden werden.

Der Vorteil der Anwendung des Eikonals tritt nicht weniger, wie in der Theorie der Fehler 3. Ordnung (auf welche sich die Seidel'schen Formeln beziehn), bei der Untersuchung der Fehler 5. Ordnung zu Tage. Die Aufstellung

vollständiger Ausdrücke für die Fehler 5. Ordnung eines gegebenen optischen Systems würde im Anschluss an die Formeln in § 5 nicht allzu umständlich sein. Die Anzahl der unabhängigen Bildfehler 5. Ordnung ergiebt sich ohne weiteres zu 9. Petzval, der Errechner des ersten Portraitobjektivs, hat für diese Zahl 12 angegeben, woraus hervorzugehen scheint, dass er trotz der Ausdehnung seiner Rechnungen auf Glieder 9. Ordnung den Zusammenhang der Coeffizienten nicht allzu tief durchschaut hat.

Abgesehn von der allgemeinen Uebersicht über die Fehler 5. Ordnung eines optischen Systems in Nr. 11 giebt diese Mitteilung also nur Bekanntes in veränderter Form. Selbstständige Untersuchungen sollen sich später an sie anschliessen.

§ 2. Optische Weglänge und Eikonal.

2. Der Begriff des Eikonals lässt sich folgendermassen erläutern:

Sind zwei Punkte P_0 und P_1 mit den rechtwinkligen Coordinaten x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, innerhalb eines optischen Systems gegeben, so giebt es im allgemeinen einen Lichtstrahl, der vom ersten Punkte zum zweiten führt. Man nenne s die Strecken, die dieser Strahl in den einzelnen Medien vom Brechungsindex n zurücklegt. Dann ist $E = \Sigma ns$ die sog. „optische Weglänge" dieses Strahls, das ist also eine Funktion der Lage der beiden Punkte P_0, P_1. Diese Funktion der Variabeln $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ heisst Eikonal.

Es gilt nun der bekannte Satz, dass die optische Weglänge für den wirklichen Strahl ein Minimum (schärfer: in Bezug auf kleine Grössen 1. Ordnung stationär) ist, verglichen mit allen benachbarten Verbindungen der beiden Endpunkte. Daraus folgt unmittelbar der weitere Satz: Die vom Punkt P_0 ausgehenden Strahlen bilden während ihres ganzen Verlaufs die Normalen auf den Flächen konstanten Eikonals um P_0. Die Flächen konstanten Eikonals um P_0 sind dabei definiert durch die Gleichung:

$$\Sigma ns = E(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \text{const.}$$

in welcher x_0, y_0, z_0 festgehalten werden, während x, y, z variieren. Es sind diese Flächen nichts anderes als die Wellenflächen der undulatorischen Optik.

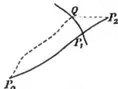


Fig. 1.

Zeichnet man nämlich die durch den Punkt P_1 gehende Fläche konstanten Eikonals und wählt einen Punkt P_2 auf der Normale der Fläche in P_1 und sucht nun nach einem Lichtweg von P_0 nach P_2, der ein Minimum der optischen Weglänge giebt, so ist dies offenbar der Weg über P_1, da die kürzesten Lichtwege nach allen Punkten Q der Fläche konstanten Eikonals gleich lang, der Zusatzweg QP_2 aber am kürzesten wird, wenn Q mit dem Fuss-

punkt der Normalen P_1 zusammenfällt. Demnach ist $P_1 P_0$ der natürliche Lichtweg, womit der obige Satz bewiesen ist.

3. Betrachtet man weiter die Veränderung des Eikonals bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Endpunktes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ nach dem Punkte $P_1'(x_1+\partial x_1, y_1+\partial y_1, z_1+\partial z_1)$, so lässt sich die Verschiebung zerlegen in eine Strecke $P_1 R$ auf der Fläche konstanten Eikonals bis zum Fusspunkte R des von P_1' auf die Fläche gefällten Lotes und die Strecke ∂N_1 von R bis P_1' auf dem Lote. Die erste Verschiebung ändert das Eikonal nicht, die zweite ändert es um $n_1 \partial N_1$, wenn n_1 den Brechungsexponenten des Mediums an dieser Stelle bezeichnet. Also im ganzen:

$$\partial E = n_1 \partial N_1.$$



Fig. 2.

Führt man die Richtungskosinus m_1, p_1, q_1 der Normalen auf der Fläche konstanten Eikonals in P_1, d. s. die Richtungskosinus des durch P_1 gehenden Strahls selbst ein, so hat man (die Normale im Sinne der Lichtbewegung genommen) bis auf kleine Grössen höherer Ordnung:

$$\partial N_1 = \partial x_1 m_1 + \partial y_1 p_1 + \partial z_1 q_1.$$

Hiermit:

$$\partial E = n_1(\partial x_1 m_1 + \partial y_1 p_1 + \partial z_1 q_1).$$

Ganz analog würde man bei Festhaltung des Punktes P_1 und Verschiebung des Punktes P_0 erhalten:

$$\partial E = -n_0(\partial x_0 m_0 + \partial y_0 p_0 + \partial z_0 q_0).$$

Verschiebt man also beide Punkte zugleich, so gilt:

1) $$\partial E = n_1(\partial x_1 m_1 + \partial y_1 p_1 + \partial z_1 q_1) - no(\partial x_0 m_0 + \partial y_0 p_0 + \partial z_0 q_0)$$

oder in anderer Schreibweise:

2) $$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_1} &= n_1 m_1, & \frac{\partial E}{\partial y_1} &= n_1 p_1, & \frac{\partial E}{\partial z_1} &= n_1 q_1, \\ \frac{\partial E}{\partial x_0} &= -n_0 m_0, & \frac{\partial E}{\partial y_0} &= -n_0 p_0, & \frac{\partial E}{\partial z_0} &= -n_0 q_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen machen die praktische Bedeutung des Eikonalbegriffs aus. Ist nämlich E als Funktion von $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ bekannt, so kann bei gegebenem Ausgangspunkt x_0, y_0, z_0 und gegebener Ausgangsrichtung m_0, p_0, q_0 durch Auflösung der drei letzten Gleichungen der Endpunkt x_1, y_1, z_1 gefunden werden. Es versteht sich, dass eine der drei Gleichungen eine identische Folge aus den beiden andern sein muss, da der Endpunkt jeder beliebige Punkt auf dem durch

$x_0, y_0, z_0, m_0, p_0, q_0$ gegebenen Strahl sein kann[1]). Die drei ersten Gleichungen liefern dann noch für jeden Punkt des Strahls die Strahlrichtung. Die eine Eikonalfunktion beherrscht also die ganze optische Abbildung.

4. Das Winkeleikonal. Das hier definierte Eikonal hat in Praxis die Unbequemlichkeit, dass es Singularitäten bekommt, sobald der Punkt P_1 in die Nähe eines dem Punkte P_0 konjugierten Brennpunktes kommt, eines Punktes, in welchem sich mehrere unendlich benachbarte von P_0 ausgehende Strahlen schneiden.

Zur Vermeidung dieses Uebelstandes soll eine mit E nahe verwandte Grösse eingeführt werden, die wir Winkeleikonal nennen wollen.

Setzt man unter Einführung zweier Constanten c_0 und c_1:

$$V = E - n_1[(x_1 - c_1)m_1 + y_1 p_1 + z_1 q_1] + n_0[(x_0 - c_0)m_0 + y_0 p_0 + z_0 q_0],$$

sodass also V zunächst als eine Funktion sowohl der Punkte x, y, z auf dem Strahl, als der Strahlrichtungen m, p, q erscheint, und variiert nach allen diesen Variabeln, so folgt infolge der Gleichungen (1) oder (2):

$$3)\quad \delta V = -n_1[(x_1 - c_1)\,\delta m_1 + y_1\,\delta p_1 + z_1\,\delta q_1] + n_0[(x_0 - c_0)\,\delta m_0 + y_0\,\delta p_0 + z_0\,\delta q_0].$$

Diese Gleichung besagt, dass V in Wirklichkeit nur eine Funktion der Anfangs- und Endrichtung des Strahls ist und dass für dieselbe gilt:

$$4)\quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial m_1} &= -n_1(x_1 - c_1), & \frac{\partial V}{\partial p_1} &= -n_1 y_1, & \frac{\partial V}{\partial q_1} &= -n_1 z_1 \\ \frac{\partial V}{\partial m_0} &= n_0(x_0 - c_0), & \frac{\partial V}{\partial p_0} &= n_0 y_0, & \frac{\partial V}{\partial q_0} &= n_0 z_0. \end{aligned}$$

Seiner geometrischen Bedeutung nach ist V die optische Weglänge zwischen den Fusspunkten der Normalen, welche man von den auf der x-Axe liegenden Punkten $x = c_0$ und $x = c_1$ resp. auf den Anfangsstrahl und den Endstrahl fällt. Da durch Angabe der Anfangsrichtung und der daraus durch die Brechungen entstehenden Endrichtung im allgemeinen ein bestimmter Strahl festgelegt wird, so erhellt auch hieraus, dass V nur eine Funktion der Strahlrichtungen, der Grössen $m_0, p_0, q_0, m_1, p_1, q_1$ ist.

Die Gleichungen (4) gestatten analog, wie die Gleichungen (2), bei gegebenem Ausgangspunkt und gegebener Ausgangsrichtung zunächst die Endrichtung und

1) In der That folgen aus der Gleichung $m^2 + p^2 + q^2 = 1$, der die Richtungskosinus genügen, für das Eikonal die beiden Differentialgleichungen, von denen wir übrigens keinen weiteren Gebrauch machen werden:

$$n_0^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_0}\right)^2, \quad n_1^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_1}\right)^2.$$

dann die Endkoordinaten zu berechnen. Singularitäten, wie sie E bei Brennpunkten aufweist, ergeben sich für W, wenn parallele Strahlen wieder in parallele Strahlen abgebildet werden, also bei einem sog. teleskopischen System. Da man es häufig mit Brennpunkten zu tun hat, dagegen meist parallel aus dem Unendlichen kommende Strahlen in konvergente Büschel verwandelt, so ist der Gebrauch von V im allgemeinen dem Gebrauch von E vorzuziehn.

Eine letzte Vereinfachung kann auf Grund der Ueberlegung erfolgen, dass die drei Richtungskosinus nicht unabhängig von einander, sondern durch die Bedingung:

$$m^2+p^2+q^2 = 1$$

verbunden sind. Eliminiert man aus V mit Hülfe dieser Bedingung m und bezeichnet die hierdurch entstehende Funktion mit W, so folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = \frac{\partial V}{\partial p_1} - \frac{\partial V}{\partial m_1}\cdot\frac{p_1}{m_1}, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial m_1}\frac{q_1}{m_1}$$

oder nach (4):

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = -n_1\left[y_1-(x_1-c_1)\frac{p_1}{m_1}\right], \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = -n_1\left[z_1-(x_1-c_1)\frac{q_1}{m_1}\right]$$

und entsprechend:

$$\frac{\partial W}{\partial p_0} = n_0\left[y_0-(x_0-c_0)\frac{p_0}{m_0}\right], \qquad \frac{\partial W}{\partial q_0} = n_0\left[z_0-(x_0-c_0)\frac{q_0}{m_0}\right].$$

Die hier rechts stehenden Grössen sind offenbar die Coordinaten des Strahlschnittpunktes mit den Ebenen $x = c_0$ und $x = c_1$. Bezeichnen wir dieselben mit Y_0, Z_0, Y_1, Z_1, so schreiben sich die vorstehenden Gleichungen:

$$\text{5)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p_1} &= -n_1 Y_1, & \frac{\partial W}{\partial q_1} &= -n_1 Z_1, \\ \frac{\partial W}{\partial p_0} &= n_0 Y_0, & \frac{\partial W}{\partial q_0} &= n_0 z_0. \end{aligned}$$

Diese Funktion W der vier Variabeln p_0, q_0, p_1, q_1 ist es, die Winkeleikonal heissen soll. Ihre Differentialquotienten liefern direkt die Schnittkoordinaten des Strahls mit den beiden Ebenen $x = c_0$ und $x = c_1$, für die man passend Objekt- und Bildebene wählen wird. W als optische Weglänge zwischen den Fusspunkten jener beiden Normalen gefasst hat eine ganz analoge Minimaleigenschaft, wie E. Geht man nämlich vom wirklichen Lichtstrahl zu einem ganz beliebigen Nachbarweg über, so ändert sich (in Bezug auf kleine Grössen 1. Ordnung) E nur in so weit, als die Anfangs- und Endkoordinaten des Strahls verändert werden, da die übrigen Aenderungen des Weges infolge der Minimaleigenschaft von E nichts ausmachen. Es gilt daher die Formel (1) auch bei beliebigen Aenderungen des ganzen Weges und dasselbe folgt dann auch für

Formel (3). Letztere ergiebt aber $\delta V = 0$, sobald man Anfangs- und Endrichtung des Strahles festhält, d. h. V und ebenso W *ist ein Minimum (resp. stationär) für den wirklichen Strahlweg, verglichen mit allen anderen Wegen, die dieselbe Anfangs- und Endrichtung haben.*

5. *Die Seidel'schen Variabeln.* Wir wollen zu einer dritten Wahl von Variabeln übergehn. Aehnlich, wie man in der Himmelsmechanik die Bahnelemente einführt, welche ohne Störungen konstant sind, und nachträglich die Aenderungen dieser Elemente infolge der Störungen berechnet, so wollen wir hier Variable benutzen, die bei der Brechung eines Strahls durch ein optisches System konstant sind, falls man sich auf die Gauss'sche Dioptrik, auf die Mitnahme erster Potenzen der als klein betrachteten Grössen p, q, Y, Z beschänkt, und wollen dann die Gleichungen für die Aenderung dieser Variabeln aufstellen, die der strengen Anwendung des Brechungsgesetzes entsprechen. Es stehen diese Variabeln in nächster Beziehung zu denjenigen, welche L. Seidel in seinen grundlegenden Arbeiten (Astron. Nachrichten 1853 und 1856, Bd. 35, 37, 43) eingeführt hat, weshalb sie Seidel'sche Variable heissen sollen.

Wir beschränken uns zur Vereinfachung von jetzt an auf *Systeme mit Rotationssymmetrie* um eine Axe, die mit der x-Axe zusammenfallen soll.

Eine erste Gruppe solcher Variabler erhält man, wenn man für die Ebenen $x = c_0$ und $x = c_1$ zwei konjugierte Ebenen im Sinne der Gauss'schen Dioptrik wählt — wir wollen sie fortan als *Objektebene* und *Bildebene* bezeichnen — und nun die Variabeln benutzt:

$$6) \qquad \frac{Y_0}{l_0},\ \frac{Y_1}{l_1};\ \frac{Z_0}{l_0},\ \frac{Z_1}{l_1},$$

wobei $\frac{l_1}{l_0}$ das zwischen den beiden Ebenen c_0 und c_1 nach Gauss herrschende *Vergrösserungsverhältnis* bezeichnet. Diese Grössen werden offenbar durch die Brechung innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik nicht geändert. Es fehlt nun noch ein Ersatz für die Winkelvariabeln. Um denselben zu erhalten, betrachte man ein weiteres Paar konjugierter Ebenen:

$$x = c_0 + M_0 \text{ und } x = c_1 + M_1.$$

Diese Ebenen sollen mit der *Eintritts-* und *Austrittspupille* des zu betrachtenden optischen Instrumentes identifiziert werden [1]). Die Schnittkoordinaten des einfallenden und gebrochenen Strahls mit diesen Ebenen seien: Y_0', Z_0', Y_1', Z_1'. Bedeutet $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ das Vergrösserungsverhältnis in diesem zweiten

1) Unter Eintrittspupille versteht man die reelle oder virtuelle Blende, welche vor der Brechung diejenigen Strahlen des von einem axialen Objektpunkt kommenden Strahlenbündels ausschneidet, die durch das ganze Instrument hindurch gelangen. Die Austrittspupille ist das Bild der Eintrittspupille im Sinne der Gauss'schen Dioptrik und hat dieselbe Funktion für die gebrochenen Strahlen.

Ebenenpaar, so hat man als zweite Gruppe von Variabeln der gewünschten Art die Grössen:

$$\frac{Y'_0}{\lambda_0},\ \frac{Y'_1}{\lambda_1},\ \frac{Z'_0}{\lambda_0},\ \frac{Z'_1}{\lambda_1}.$$

Geometrisch erhellt der Zusammenhang der Y', Z' mit den Winkelgrössen p, q:

$$\frac{Y'_0 - Y_0}{M_0} = \frac{p_0}{\sqrt{1-p_0^2-q_0^2}},\quad \frac{Y'_1 - Y_1}{M_1} = \frac{p_1}{\sqrt{1-p_1^2-q_1^2}},$$

$$\frac{Z'_0 - Z_0}{M_0} = \frac{q_0}{\sqrt{1-p_0^2-q_0^2}},\quad \frac{Z'_1 - Z_1}{M_1} = \frac{q_1}{\sqrt{1-p_1^2-q_1^2}}.$$

Es empfiehlt sich hier indessen noch eine kleine Abänderung. Setzt man die Wurzeln im Nenner auf der rechten Seite überall gleich eins, und definiert neue Grössen Y', Z', durch die Gleichungen:

$$\frac{Y'_0 - Y_0}{M_0} = p_0,\quad \frac{Z'_0 - Z_0}{M_0} = q_0,\quad \frac{Y'_1 - Y_1}{M_1} = p_1,\quad \frac{Z'_1 - Z_1}{M_1} = q_1,$$

so werden die Quotienten $\frac{Y'_0}{\lambda_0}$, $\frac{Y'_1}{\lambda_1}$ u. s. w. immer noch innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik bei der Brechung durch das System konstant bleiben, man hat aber den Vorteil, dass die Beziehungen zwischen den alten und den neuen Variablen lineare werden.

Indem wir schliesslich noch den Grössen (6) einen gemeinsamen konstanten Faktor hinzufügen, der die späteren Beziehungen etwas vereinfacht, haben wir das System der neuen Variablen y, z, η, ζ:

$$7)\quad \begin{aligned} y_0 &= \frac{Y_0}{l_0}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0},\quad z_0 = \frac{Z_0}{l_0}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0},\quad \eta_0 = \frac{Y_0}{\lambda_0}+\frac{M_0}{\lambda_0}\,p_0,\quad \zeta_0 = \frac{Z_0}{\lambda_0}+\frac{M_0}{\lambda_0}\,q_0,\\ y_1 &= \frac{Y_1}{l_1}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0},\quad z_1 = \frac{Z_1}{l_1}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0},\quad \eta_1 = \frac{Y_1}{\lambda_1}+\frac{M_1}{\lambda_1}\,p_1,\quad \zeta_1 = \frac{Z_1}{\lambda_1}+\frac{M_1}{\lambda_1}\,q_1. \end{aligned}$$

Es sei noch hervorgehoben, dass zwischen den Grössen M_0, M_1, $\frac{l_1}{l_0}$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, die Beziehung besteht:

$$8)\quad \frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0} = \frac{n_1\lambda_1 l_1}{M_1},$$

die den Ausdruck der Sinusbedingung (s. u. Gleichung (16)) innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik enthält.

Die Umkehrung von (7) giebt den Ausdruck der alten Variablen durch die neuen in Rücksicht auf diese Beziehung:

$$
7a) \quad
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{\lambda_0}{M_0}\eta_0 - \frac{y_0}{n_0\lambda_0}, \quad q_0 = \frac{\lambda_0}{M_0}\zeta_0 - \frac{z_0}{n_0\lambda_0}, \quad Y_0 = y_0\cdot\frac{M_0}{n_0\lambda_0}, \quad Z_0 = z_0\cdot\frac{M_0}{n_0\lambda_0} \\
p_1 &= \frac{\lambda_1}{M_1}\eta_1 - \frac{y_1}{n_1\lambda_1}, \quad q_1 = \frac{\lambda_1}{M_1}\zeta_1 - \frac{z_1}{n_1\lambda_1}, \quad Y_1 = y_1\cdot\frac{M_1}{n_1\lambda_1}, \quad Z_1 = z_1\cdot\frac{M_1}{n_1\lambda_1}.
\end{aligned}
$$

6. Das zugehörige Eikonal. Eine Funktion vom Charakter des Eikonals ergiebt sich für die neuen Variabeln folgendermassen. Die Gleichungen (5) lassen sich zusammenfassen in die Beziehung:

$$\delta W = -n_1\,(Y_1\delta p_1 + Z_1\delta q_1) + n_0(Y_0\delta p_0 + Z_0\delta q_0).$$

Setzt man hier die neuen Variabeln aus den Gleichungen (7a) ein, so folgt:

$$(9)\ \delta W = y_0\left(\delta\eta_0 - \frac{M_0}{n_0}\frac{\delta y_0}{\lambda_0^2}\right) + z_0\left(\delta\zeta_0 - \frac{M_0}{n_0}\frac{\delta z_0}{\lambda_0^2}\right) - y_1\left(\delta\eta_1 - \frac{M_1}{n_1}\frac{\delta\eta_1}{\lambda_1^2}\right) - z_1\left(\delta\zeta_1 - \frac{M_1}{n_1}\frac{\delta z_1}{\lambda_1^2}\right).$$

Die Terme rechts sind zum Teil vollständige Differentiale. Man wird hierdurch dazu geführt, an Stelle von W den Ausdruck zu bilden:

$$10) \qquad S = W + \frac{M_0}{n_0}\frac{y_0^2+z_0^2}{2\lambda_0^2} - \frac{M_1}{n_1}\frac{y_1^2+z_1^2}{2\lambda_1^2} + y_0(\eta_1-\eta_0) + z_0(\zeta_1-\zeta_0).$$

Die Variation ergiebt in Rücksicht auf 9):

$$11) \qquad \delta S = \delta y_0(\eta_1-\eta_0) + \delta z_0(\zeta_1-\zeta_0) + \delta\eta_1(y_0-y_1) + \delta\zeta_1(z_0-z_1)$$

oder in anderer Form:

$$
12) \qquad
\begin{aligned}
\eta_1 - \eta_0 &= +\frac{\partial S}{\partial y_0}, & y_1 - y_0 &= -\frac{\partial S}{\partial \eta_1} \\
\zeta_1 - \zeta_0 &= +\frac{\partial S}{\partial z_0}, & z_1 - z_0 &= -\frac{\partial S}{\partial \zeta_1}.
\end{aligned}
$$

S ist also eine Funktion der vier Variabeln $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$, deren Differentialquotienten unmittelbar die Verschiebungen der Schnittpunktkoordinaten des Strahls gegen die aus der Gauss-schen Dioptrik folgenden Werte angeben. Sie soll als Seidel-sches Eikonal bezeichnet werden.

§. 3. Stigmatische Punktepaare und Sinusbedingung.

7. Die Existenz des Eikonals hat die Gültigkeit gewisser Reciprozitätssätze zwischen den Verschiebungen in unsern beiden Ebenenpaaren zur Folge, deren wichtigster Spezialfall sich in der sogenannten Sinusbedingung ausspricht.

Hält man η_1 und ζ_1 fest und lässt y_0 und z_0 sich ändern, so folgt aus (12):

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} - 1 = -\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_1 \partial y_0}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} - 1 = -\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta_1 \partial z_0},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_0} = -\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_1 \partial z_0}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = -\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta_1 \partial y_0}.$$

Hält man andrerseits y_0 und z_0 fest und lässt η_1 ünd ζ_1 variieren, so erhält man:

$$1 - \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_0 \partial \eta_1}, \qquad 1 - \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_0 \partial \zeta_1},$$

$$-\frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_0 \partial \zeta_1}, \qquad -\frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_0 \partial \eta_1}.$$

Damit:

13) $$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1}.$$

Nachdem diese Reciprozitäten vorausgeschickt sind, betrachte man zunächst ein Paar etigmatischer Punkte, d. h. Punkte von solcher Beschaffenheit, dass alle von dem einen ausgehende Strahlen sich in dem andern schneiden. Sollen insbesondere die Mitten unsrer Objekt- und Bildebene ein solches stigmatisches Punktepaar bilden, so muss aus $y_0 = z_0 = 0$ auch immer $y_1 = z_0 = 0$ folgen, welche Werte auch η_1 und ζ_1 haben mögen, welchen Weg der Strahl vom Punkt $y_0 = z_0 = 0$ aus nehmen mag. Für das Seidel'sche Eikonal ergiebt sich damit die Bedingung stigmatischer Punktepaare:

14) $$\frac{\partial S}{\partial \eta_1} = \frac{\partial S}{\partial \zeta_1} = 0$$

für $y_0 = z_0 = 0$ und beliebige Werte von η_1 und ζ_1. Man fordere jetzt weiter die scharfe Abbildung zweier unendlicher kleiner senkrecht zur x-Axe stehender Flächenelements in der Nachbarschaft der stigmatischen Punkte. Hiermit iet gemeint, dass die Beziehungen der Gauss'schen Dioptrik $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ für unendlich kleines y_0 und z_0 bis auf unendlich kleines höherer Ordnung erfüllt sein sollen, oder schärfer, daß:

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = 1, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = 0$$

gelten soll und zwar für $y_0 = z_0 = 0$ und beliebige Werte von η_1 und ζ_1. Damit liefern die Reziprozitäten (13):

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1} = 1, \qquad \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1} = 0$$

wiederum für alle Werte von η_1 und ζ_1 und für $y_0 = z_0 = 0$, d. h. für alle Strahlen, die von unserem einen stigmatischen Punkte ausgehn und somit in

dem andern zusammenlaufen. Beachtet man, dass wegen der Rotationssymmetrie zu dem einfallenden Axialstrahl $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ der austretende Axialstrahl $\eta_1 = \zeta_1 = 0$ gehört, so erhält man durch Integration dieser Gleichungen:

15) $$\eta_0 = \eta_1, \qquad \zeta_0 = \zeta_1.$$

In Worten: die Bedingung für die scharfe Abbildung zweier unendlich kleiner achsensenkrechter Flächenelemente um die zwei stigmatischen Punkte $y_0 = z_0 = 0$ und $y_1 = z_1 = 0$ besteht in der Gleichheit der Coordinaten η und ζ für die entsprechenden Strahlen der beiden von den stigmatischen Punkten ausgehenden Strahlenbüschel.

Führt man die Winkelkoordinaten p, q nach (7a) ein unter Beachtung, dass für $y = z = 0$ auch $Y = Z = 0$ folgt, so findet man statt (15) die Gleichungen:

16) $$\frac{p_1}{p_0} = \frac{q_1}{q_0} = \frac{n_0 l_0}{n_1 l_1}.$$

Da p und q gleich den Sinus der Strahlneigungen gegen die Y- und Z-Coordinatenebenen sind, so erklärt sich die Bezeichnung dieser Forderung konstanten Sinusverhältnisses in den zu den stigmatischen Punkten gehörigen Strahlbüscheln als einer „Sinusbedingung".

Der rechnerische Wert der Sinusbedingung besteht darin, dass sie gestattet, aus dem Verhalten der leichter zu verfolgenden die Axe schneidenden Strahlen einen Schluss auf die Abbildung durch Strahlen zu ziehen, welche in geringer Distanz windschief zur Axe verlaufen.

Ein Punktepaar, welches stigmatisch ist und in welchem ausserdem die Sinusbedingung erfüllt ist, wird von Abbe ein aplanatisches Punktepaar genannt.

§. 4. Die Reihenentwicklung des Eikonals. Die Fehler dritter und fünfter Ordnung eines optischen Systems.

8. Da man bei der strengen Verfolgung eines Strahls durch ein optisches System schon bei wenigen brechenden Flächen jeden Ueberblick verliert, so gründet sich die Theorie der optischen Instrumente fast ganz auf Reihenentwicklungen, und zwar entwickelt man nach Potenzen der Grössen Y, Z, p, q oder auch y, z, η, ζ, indem man dieselben als klein voraussetzt. Die Convergenz dieser Reihenentwicklungen ist in den meisten Fällen der Praxis so gut, dass wenige Glieder entweder schon ein hinreichend exaktes Resultat oder doch eine gute Annäherung geben, von der aus durch Differentialmethoden weiter gegangen werden kann.

Wir halten die Beschränkung auf zur x-Axe rotationssymmetrische Instru-

mente fest. Dann sieht man unmittelbar, dass in der Entwicklung des Winkeleikonals W nach Potenzen von p und q nur die ganzen Potenzen der drei Grössen:

$$p_0^2 + q_0^2, \quad p_1^2 + q_1^2, \quad p_0 p_1 + q_0 q_1,$$

insbesondere also nur Glieder grader Ordnung, vorkommen werden. Ebenso wird die Entwicklung des Seidel'schen Eikonals nach aufsteigenden Potenzen der Grössen:

$$17) \qquad R_0 = y_0^2 + z_0^2 \qquad \varrho_1 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \qquad \varkappa_{01} = y_0 \eta_1 + z_0 \zeta_1$$

fortschreiten.

Bleiben wir zunächst bei dem Winkeleikonal stehen und zerlegen dasselbe in Teile, welche den verschiedenen Ordnungen der Glieder in Bezug auf Potenzen von p und q entsprechen:

$$W = W^2 + W^4 + W^6 + \dots$$

so kann man sich in erster Linie auf W^2 beschränken und die höheren Terme vernachlässigen. Dann erhält man nach (5) lineare Beziehungen zwischen den Grössen p, q, Y, Z. Der Inhalt dieser linearen Beziehungen bildet die Gauss-sche Dioptrik, deren Ableitung auf diesem Wege hier indessen nicht wiederholt werden soll. Nimmt man zweitens W^4 mit, so erhält man nach (5) Korrektionen 3. Ordnung in den p, q zu den Gauss'schen Werten der Coordinaten. Die hieraus entspringende Theorie der „Fehler dritter Ordnung" bildet das hauptsächlichste Kapitel der Theorie der optischen Instrumente über die Gauss'sche Theorie hinaus. Die Berücksichtigung von W^6 ergiebt Fehler 5. Ordnung u. s. f.

Geht man jetzt auf das Seidel'sche Eikonal über, so kann dessen Entwicklung keine Glieder zweiter Ordnung enthalten, weil innerhalb dieser Genauigkeit in den Gleichungen (12) nach Gauss $y_0 = y_1$, $\eta_0 = \eta_1$ u. s. w. und damit $S = 0$ folgt. Die Entwicklung lautet also:

$$S = S^4 + S^6 + \dots$$

Die Berücksichtigung von S^4 allein giebt wieder die Theorie der Fehler 3. Ordnung, die von S^6 die Fehler 5. Ordnung u. s. w.

9. Die 5 Fehler dritter Ordnung eines optischen Systems. Unter Benutzung der Bezeichnungen (17) lautet der allgemeine Ausdruck von S^4:

$$18) \qquad S^4 = -\frac{A}{4} R_0^2 - \frac{B}{4} \varrho_1^2 - C \varkappa_{01}^2 - \frac{D}{2} R_0 \varrho_1 + E R_0 \varkappa_{01} + F \varrho_0 \varkappa_{01}$$

wobei die $A \dots F$ willkürliche Constante sind und die Vorzeichen und Zahlenfaktoren in Rücksicht auf die spätere Bequemlichkeit gewählt sind.

Führt man die Differentiationen gemäss (12) aus und legt zur Vereinfachung den Objektpunkt in die $x-y$-Ebene, sodass $z_0 = 0$ wird, so findet man:

$$19)\quad \begin{aligned} y_1 - y_0 &= y_0\,[2Cy_0\eta_1 - Ey_0^2 - F(\eta_1^2+\zeta_1^2)] + \eta_1\,[B(\eta_1^2+\zeta_1^2) + Dy_0^2 - 2Fy_0\eta_1] \\ z_1 &= \zeta_1\,[B(\eta_1^2+\zeta_1^2) + Dy_0^2 - 2Fy_0\eta_1] \end{aligned}$$

Da das Glied mit A weggefallen ist, so bleiben im ganzen fünf verschiedene Fehler 3. Ordnung eines optischen Systems möglich entsprechend den 5 Coeffizienten B, C, D, E, F der Eikonalentwicklung. Wir isolieren die einzelnen Fehler, indem wir jeweils alle Coeffizienten bis auf einen gleich null setzen. Es empfiehlt sich dabei:

$$20)\quad \eta_1 = \sigma \cos\varphi, \qquad \zeta_1 = \sigma \sin\varphi$$

zu setzen und die sog. „Aberrationskurven" zu betrachten, die der Punkt y_1, z_1 durchläuft, wenn man σ konstant hält und φ den Umkreis durchlaufen lässt. Es sind dies also die Curven, welche auf der Bildebene ausgeschnitten werden durch die Strahlen eines Kegelmantels, der den Objektpunkt zur Spitze hat und nach der Brechung in einem Kreis vom Radius σ die Austrittspupille (die Ebene, in welcher wir η_1, ζ_1 zählen) durchsetzt. Da nahe $\eta_0 = \eta_1$, $\zeta_0 = \zeta_1$, so ist auch der Schnitt dieses Kegelmantels mit der Eintrittspupille nahe ein Kreis.

So ergiebt sich der Reihe nach, indem man noch zur Abkürzung die Verschiebungen von y_1 und z_1 durch die einzelnen Fehler mit Δy_1 und Δz_1 bezeichnet:

$$21)\quad \text{a) } B \gtrless 0 \qquad \Delta y_1 = B\sigma^3 \cos\varphi, \quad \Delta z_1 = B\sigma^3 \sin\varphi.$$

Die Aberrationskurven bilden konzentrische Kreise um den Gauss'schen Bildpunkt ($y_1 = y_0$), deren Radien mit der dritten Potenz der Oeffnung des Instruments wachsen, von der Lage des Objekts, der Stelle im Gesichtsfeld, aber unabhängig sind. Man nennt diesen Fehler „sphärische Aberration".

$$22)\quad \text{b) } E \gtrless 0 \qquad \Delta y_1 = -Ey_0^3, \qquad \Delta z_1 = 0.$$

Da η_1 und ζ_1 aus den Formeln verschwinden, ist die Abbildung punktförmig. Nur sind die Axenabstände der Bildpunkte denen der Objektpunkte nicht genau proportional. Es findet „Verzeichnung" statt.

$$23)\quad \text{c) } F \gtrless 0 \qquad \Delta y_1 = -Fy_0\sigma^2(1 + 2\cos^2\varphi) = -Fy_0\sigma^2(2 + \cos 2\varphi), \quad \Delta z_1 = -Fy_0\sigma^2 \sin 2\varphi.$$

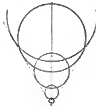


Fig. 3.

Die Aberrationskurven, die bei festgehaltenem Objektpunkt y_0 für die verschiedenen einfallenden Strahlenkegel (veränderliches σ) entstehen, sind Kreise, welche zwei unter einem Winkel von 30° gegen die y-Axe vom Gauss'schen Bildpunkt ausgehende Gerade berühren. Dieser Fehler heisst wegen des unsymmetrischen geschwänzten Aussehens, das er den Bildern giebt, die „Koma".

d) die beiden Fehler C und D betrachtet man am besten gemeinsam.

24) $$C \gtreqless 0,\ D \gtreqless 0 \qquad y_1 - y_0 = (2C + D)\, y_0^2\sigma \cos\varphi\,,$$
$$z_1 = D\, y_0^2\sigma \sin\varphi.$$

Sie sind auf Astigmatismus und Bildwölbung zurückzuführen. Das eintretende Strahlenbüschel, welches wir für den Augenblick als sehr dünn betrachten wollen, hat, wie bekanntlich jedes dünne Strahlenbüschel, zwei Brennlinien, von denen die eine radial oder, wie man sagt, sagittal zur Axe des Instruments gerichtet ist, während die andere tangential zu einem Kreise liegt, dessen Mittelpunkt in der optischen Axe, dessen Ebene senkrecht zur optischen Axe steht. Die beiden Flächen, welche diese beiden Brennlinien durchlaufen, wenn man das Objekt in der Objektebene verschiebt, heissen „tangentiale" und „sagittale" „Bildflächen". Man kann beide Flächen in erster Näherung ersetzen durch die in der Axe berührenden Krümmungskugeln, welche die Radien ϱ_t und ϱ_s haben mögen. Man zähle ϱ_t und ϱ_s positiv, wenn der Kugelmittelpunkt im Sinne der Lichtbewegung vor der Bildebene liegt. Man sieht ohne weiteres, dass einer solchen Krümmung der Bildflächen die folgenden Verschiebungen des Strahlschnittpunktes in der Bildebene entsprechen:

$$\varDelta Y_1 = \frac{Y_1^2}{2\varrho_t} \cdot \frac{Y_1'}{M_1}, \qquad \varDelta Z_1 = \frac{Y_1^2}{2\varrho_s} \cdot \frac{Z_1'}{M_1}.$$

Führt man die Seidel'schen Variabeln ein, so findet man:

$$\varDelta y_1 = \frac{y_1^2 \eta_1}{2\varrho_t n_1}, \qquad \varDelta z_1 = \frac{y_1^2 \zeta_1}{2\varrho_s n_1}.$$

Erlaubt man sich hier noch y_1 mit y_0 zu vertauschen, so erhält man durch Vergleich mit (24):

$$\frac{1}{\varrho_t} = 2n_1(2C + D), \qquad \frac{1}{\varrho_s} = 2n_1 D.$$

Man wird demnach passend $2C + D$ als tangentiale und D als sagittale Bildwölbung bezeichnen. Die halbe Differenz beider Krümmungen:

25) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_t} - \frac{1}{\varrho_s}\right) = 2n_1 C$$

bezeichnet man als Astigmatismus. Die halbe Summe:

26) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_t} + \frac{1}{\varrho_s}\right) = 2n_1(C + D)$$

wird schlechthin „Bildwölbung" genannt. In der Tat wird bei Verschwinden aller übrigen Fehler eine Kugel vom Radius ϱ, welche die Bildebene in der Axe berührt, der Ort des scharfen Bildes der Objektebene sein.

10. **Die numerische Grösse der Fehler.** Setzt man die willkürliche Grösse $\lambda_0 = 1$ und setzt ferner voraus, dass Anfangs- und Endmedium den Brechungsindex $n_0 = n_1 = 1$ haben, so hat man nach 7):

$$y_0 = \frac{Y_0}{M_0}, \qquad \eta_1 = \frac{Y_1'}{\lambda_1} = \sigma \cos \varphi,$$

$$z_0 = \frac{Z_0}{M_0}, \qquad \zeta_1 = \frac{Z_1'}{\lambda_1} = \sigma \sin \varphi.$$

Man sieht, dass y_0 und z_0 nichts anderes sind, als die Winkelabstände des Objekts von der Axe, gesehen von der Mitte der Eintrittspupille aus, und zwar genauer die Tangenten der Abstandswinkel, dass auf der andern Seite η_1 und ζ_1 bis auf den Faktor λ_1 mit den Coordinaten in der Austrittspupille übereinstimmen.

Indem wir, wie bisher, $z_0 = 0$ setzen, wollen wir die Bezeichnungen einführen:

20a) $$y_0 = g \cdot \mathrm{tg}\, 3^\circ, \qquad \frac{\lambda_1 \sigma}{M_1} = \frac{v}{20}.$$

Dabei soll g an „**Grösse des Gesichtsfelds**“ erinnern, insofern man das doppelte des grössten zulässigen Abstandes des Objektes von der Axe als Grösse des Gesichtsfelds bezeichnet. Ebenso erinnere v an „**Oeffnungsverhältnis**“. Da nämlich M_1 den Abstand zwischen Austrittspupille und Bildebene bedeutet, ist $\frac{\lambda_1 \sigma}{M_1}$ die Tangente des Oeffnungswinkels des austretenden Strahlenbüschels, wenn man für σ den grössten zulässigen Wert, d. i. den Radius der kreisförmig gedachten Austrittspupille einsetzt, und das doppelte dieser Grösse pflegt man als „Oeffnungsverhältnis“ zu bezeichnen. Die Faktoren tg 3° und $\frac{1}{20}$ sind hinzugefügt, damit für die in Praxis häufigsten Oeffnungsverhältnisse und Gesichtsfelddurchmesser g und v handliche Zahlen bleiben.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Correktionen Δy und Δz sind nach der Festsetzung $\lambda_0 = 1$ sehr nahe die Aenderungen der Schnittkoordinaten der Strahlen mit der Bildebene, ausgedrückt in dem Bogenmass, das ihnen in dem von der Mitte der Eintrittspupille aus gesehenen Objekt entspricht. Dividiert man dieselben daher durch arc 1″, so erhält man die Fehler der optischen Abbildung unmittelbar in ihrem auf das Objekt zurückprojizierten Wert in Bogensekunden.

Führt man die Bezeichnungen (20a) in den Formeln (21) bis (24) ein und dividiert durch arc 1″, so empfiehlt sich folgende Abtrennung. Man setze:

$$B' = \frac{2\,B\,M_1^2}{\lambda_1^2 \cdot 20^2 \cdot \text{arc}\,1''} = B\,\frac{M_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \overline{1{,}71237} = 51{,}''566 \cdot B\,\frac{M_1^2}{\lambda_1^2}$$

$$C' = \frac{2\,C\,M_1}{\lambda_1 \cdot 20 \cdot \text{arc}\,1''}(\text{tg}\,3^\circ)^2 = C\,\frac{M_1}{\lambda_1} \cdot \overline{1{,}75323} = 56{,}654 \cdot C\,\frac{M_1}{\lambda_1}$$

21a) $$D' = \frac{2\,D\,M_1}{\lambda_1 \cdot 20 \cdot \text{arc}\,1''}(\text{tg}\,3^\circ)^2 = D \cdot \frac{M_1}{\lambda_1} \cdot \overline{1{,}75323} = 56{,}654\;\;D\,\frac{M_1}{\lambda_1}$$

$$E' = \frac{E\,(\text{tg}\,3^\circ)^2}{\text{arc}\,1''} = E \cdot \overline{1{,}47263} = 29{,}692\;\;E$$

$$F' = \frac{3\,F\,M_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \frac{\text{tg}\,3^\circ}{20^2\,\text{arc}\,1''} = F \cdot \frac{M_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \overline{1{,}90889} = 81{,}076\;\;F\,\frac{M_1^2}{\lambda_1^2}$$

und bezeichne die Grössen $B' \ldots F'$ als die numerischen Fehler des Systems.

Dann ist in Bogensekunden:

$B' . v^2$ der Durchmesser des Zerstreuungskreises der sphär. Aberration
$E' . g^3$ die Verzeichnung
21b) $F' . gv^2$ die radiale Erstreckung der Coma (die tangentiale Erstreckung beträgt $^2/_3$ der radialen)
$(2C' + D')g^2v$ die radiale } Axe der durch Astigmatismus und Bildwölbung
$D'.g^2v$ die tangentiale } erzeugten Ellipse.

Diese Grössen werde ich späterhin (abgesehn von der Verzeichnung) als die durch die einzelnen Fehler hervorgerufenen Streuungen bezeichnen.

Im Falle das Objekt in's Unendliche rückt, gewinnt der Faktor $\frac{M_1}{\lambda_1}$ eine besonders einfache Bedeutung. Es ist allgemein:

$$Y_1 = \frac{l_1}{l_0} \cdot Y_0 = M_0 \cdot \frac{l_1}{l_0} \cdot \frac{Y_0}{M_0}$$

oder nach (8) für $n_0 = n_1 = \lambda_0 = 1$:

$$Y_1 = \frac{Y_0}{M_0} \cdot \frac{M_1}{\lambda_1}.$$

Nun ist $\frac{Y_0}{M_0}$, wie erwähnt, die scheinbare Grösse des Objekts, Y_1 die Grösse des Bildes. Der Proportionalitätsfaktor giebt also für unendlich entferntes Objekt die Brennweite f des Instrumentes an, wobei allerdings noch das negative Zeichen einzuführen ist, da mit positiver Brennweite Bildumkehrung verbunden ist. Daher folgt die Beziehung:

21c) $$\frac{M_1}{\lambda_1} = -f.$$

In Bezug auf die Vorzeichen lässt sich ferner aus den Formeln der vorigen Nummer das folgende ablesen:

Positives B' bedeutet kürzere Vereinigungsweite der Randstrahlen, verglichen mit den Mittelstrahlen (sog. „Unterkorrektion" der sphärischen Aberration).

Positives E' bedeutet Zusammendrängung der äusseren Partien des Objekts (sog. tonnenförmige Verzeichnnng, weil ein Quadrat sich mit tonnenförmig ausgewölbten Seiten abbildet), negatives E' liefert die sogenannte kissenförmige Verzeichnnng (die Ecken des Quadrats werden zu weiter von der Mitte entfernten Zipfeln).

Positives F' bedeutet axenwärts gerichtete Coma.

Positives $2C'+D'$ bedeutet Lage der tangentialen Bildfläche hinter der Ganss'schen Bildebene,

Positives D' bedeutet Lage der sagittalen Bildfläche hinter der Ganss'schen Bildebene.

11. Einfluss der Blendenstellung. Einer sehr einfachen Behandlnng ist die Frage nach dem Einflnss der Blendenstellnng fähig, wenn man von dem Eikonal Gebranch macht. Wir dachten uns die Begrenzung der wirksamen Oeffnung des Instruments durch die Eintrittspupille (oder irgend ein von ihr durch einen Teil des optischen Systems entworfenes Bild) erfolgend. Die Eintrittspupille war dnrch ihren Abstand M_0 von der Objektebene festgelegt. Es möge nun die Eintrittspnpille in den Abstand $\overline{M}_0$ von der Objektebene verschoben werden. Dadurch nehmen alle von der Lage der Eintrittspupille abhängigen Grössen, wie das Vergrösserungsverhältnis $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ zwischen Austritts- und Eintrittspnpille und die ganzen Seidel'schen Variablen neue Werte an, die durch einen Querstrich bezeichnet werden sollen.

Den Gleichnngen (7) (ich lasse die analogen Beziehungen für die z-Coordinate weg):

$$y_0 = \frac{n_0\lambda_0}{M_0}\cdot Y_0, \qquad \eta_0 = \frac{Y_0}{\lambda_0} + \frac{M_0}{\lambda_0}p_0,$$

$$y_1 = \frac{n_1\lambda_1}{M_1}\cdot Y_1, \qquad \eta_1 = \frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{M_1}{\lambda_1}p_1$$

treten die Gleichnngen gegenüber:

$$\overline{y}_0 = \frac{n_0\overline{\lambda}_0}{\overline{M}_0}\,Y_0, \qquad \overline{\eta}_0 = \frac{Y_0}{\overline{\lambda}_0} + \frac{\overline{M}_0}{\overline{\lambda}_0}p_0$$

$$\overline{y}_1 = \frac{n_1\overline{\lambda}_1}{\overline{M}_1}\,Y_1, \qquad \overline{\eta}_1 = \frac{Y_1}{\overline{\lambda}_1} + \frac{\overline{M}_1}{\overline{\lambda}_1}p_1$$

woraus sich die Beziehungen zwischen den alten und den neuen Seidel'schen Variabeln ergeben:

$$y_0 = \bar{y}_0 \frac{\lambda_0 \bar{M}_0}{\bar{\lambda}_0 \bar{M}_0} \qquad \eta_0 = \bar{\eta}_0 \cdot \frac{\bar{\lambda}_0 M_0}{\lambda_0 \bar{M}_0} + \bar{y}_0 \left(\frac{\bar{M}_0 - M_0}{n_0 \lambda_0 \bar{\lambda}_0} \right),$$

$$y_1 = \bar{y}_1 \cdot \frac{\lambda_1 \bar{M}_1}{\bar{\lambda}_1 \bar{M}_1}, \qquad \eta_1 = \bar{\eta}_1 \cdot \frac{\bar{\lambda}_1 M_1}{\lambda_1 \bar{M}_1} + \bar{y}_1 \cdot \frac{\bar{M}_1 - M_1}{n_1 \lambda_1 \bar{\lambda}_1}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\bar{\lambda}_0 M_0}{\lambda_0 \bar{M}_0} = \beta, \qquad \frac{\bar{M}_0 - M_0}{n_0 \lambda_0 \bar{\lambda}_0} = \gamma,$$

so schreibt sich dies:

$$\bar{y}_0 = \beta y_0, \qquad \eta_0 = \beta \bar{\eta}_0 + \gamma \bar{y}_0,$$
$$\bar{y}_1 = \beta y_1, \qquad \eta_1 = \beta \bar{\eta}_1 + \gamma \bar{y}_1,$$

wobei bereits auf die für jedes Doppelpaar konjugierter Ebenen gültige Invariante (8) Rücksicht genommen ist.

Ersetzt man nunmehr in der Eikonalentwicklung (18) die alten Variabeln durch die neuen, so erhält man eine Entwicklung von genau derselben Form, in welcher die Coeffizienten, d. h. die der veränderten Blendenstellung entsprechenden Fehler die folgenden Werte haben:

18a)
$$\begin{aligned} \bar{B} &= B\beta^4, \\ \bar{F} &= F\beta^2 - B\beta^3\gamma, \\ \bar{C} &= C \quad - 2F\beta\gamma + B\beta^2\gamma^2, \\ \bar{D} &= D \quad - 2F\beta\gamma + B\,.\,\beta^2\gamma^2, \\ \bar{E} &= \frac{E}{\beta^2} \quad - (D+2C)\frac{\gamma}{\beta} + 3F\gamma^2 - B\beta\gamma^3. \end{aligned}$$

Dieselben sind bereits in solcher Reihenfolge angeschrieben, dass jeder Fehler von der Blendenstellung (abgesehen von einem Faktor β^4 oder $\frac{1}{\beta^2}$) unabhängig wird, sobald die sämtlichen vorausgehenden Fehler verschwinden.

Es sei insbesondere hervorgehoben, dass bei Verschwinden von sphärischer Aberration und Koma ($B = F = 0$) die Bildkrümmungen C und D von der Blendenstellung unabhängig werden.

Es ist dies Verhalten leicht verständlich daraus, dass man durch Abblenden gewisser Strahlen nur solange Einfluss auf die Form des Bildes hat, als die Strahlen nicht alle in einen Punkt zusammen laufen.

12. Die 9 Fehler 5. Ordnung eines optischen Systems. Die Ueberlegungen sind den bei der 3. Ordnung angewandten völlig analog. Der allgemeine Ausdruck von S^6 ist:

$$S^4 = S_1 R_0^3 + S_2 R_0^2 \varrho_1 + S_3 R_0^2 \varkappa_{01} + S_4 R_0 \varrho_1^2 + S_5 R_0 \varrho_1 \varkappa_{01} + S_6 R_0 \varkappa_{01}^2 + S_7 \varrho_1^3 + S_8 \varrho_1^2 \varkappa_{01} + S_9 \varrho_1 \varkappa_{01}^2 + S_{10} \varkappa_{01}^3,$$

wobei S_1 bis S_{10} wiederum willkürliche Constanten bedeuten. Die Differentiation gemäss den Gleichungen (12) liefert unter der Voraussetzung, dass man z_0, wie oben, gleich null setzt:

$$\begin{aligned} y_0 - y_1 = \frac{\partial S^4}{\partial \eta_1} + 2\eta_1 [S_2 y_0^4 + 2S_4 y_0^2(\eta_1^2+\zeta_1^2) + S_5 y_0^3 \eta_1 + 3S_7(\eta_1^2+\zeta_1^2)^2 + 2S_8 y_0 \eta_1 (\eta_1^2+\zeta_1^2) \\ + S_9 y_0^2 \eta_1^2] \\ + y_0 [S_3 y_0^4 + S_5 y_0^2(\eta_1^2+\zeta_1^2) + 2S_6 y_0^3 \eta_1 + S_8(\eta_1^2+\zeta_1^2)^2 + 2S_9 y_0 \eta_1 (\eta_1^2+\zeta_1^2) \\ + 3S_{10} y_0^2 \eta_1^2] \\ - z_1 = \frac{\partial S^4}{\partial \zeta_1} + 2\zeta_1 [S_2 y_0^4 + 2S_4 y_0^2(\eta_1^2+\zeta_1^2) + S_5 y_0^3 \eta_1 + 3S_7(\eta_1^2+\zeta_1^2)^2 + 2S_8 y_0 \eta_1 (\eta_1^2+\zeta_1^2) \\ + S_9 y_0^2 \eta_1^2]. \end{aligned} \tag{27}$$

Da S_1 fortgefallen ist, giebt es im Ganzen 9 unabhängige Fehler 5. Ordnung. Ich isoliere dieselben, indem ich die jedem einzelnen entsprechenden Aberrationskurven betrachte, wobei wiederum $\eta_1 = \sigma \cos \varphi$, $\zeta_1 = \sigma \sin \varphi$ gesetzt und die entstehenden Aenderungen von y_1 und z_1 mit Δy_1 und Δz_1 bezeichnet werden. Zugleich erlaube ich mir Namen für diese Fehler vorzuschlagen. Die Fehler sind geordnet nach ihren Dimensionen in Bezug auf y_0, den Abstand des Objects von der Axe.

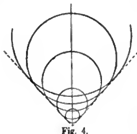
a) $S_7 \gtrless 0$. Sphärische Aberration zweiter Stufe.

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= -6S_7 \sigma^5 \cos \varphi \\ \Delta z_1 &= -6S_7 \sigma^5 \sin \varphi. \end{aligned} \tag{28}$$

Die Aberrationskurven sind Kreise, deren Radius unabhängig von dem Orte des Objekts ist und mit der 5. Potenz der Oeffnung des Instrumentes wächst.

b) $S_8 \gtrless 0$. Koma zweiter Stufe.

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= -S_8 y_0 \sigma^4 [1 + 4 \cos^2 \varphi] \\ \Delta z_1 &= -S_8 y_0 \sigma^4 \cdot 4 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \tag{29}$$


Fig. 4.

Die Aberrationskurven sind Kreise vom Radius $2S_8 y_0 \sigma^4$, welche zwei unter einem Winkel von 41°,8 ($\sin 41°,8 = \frac{2}{3}$) gegen die y-Axe geneigte Grade berühren.

c) $S_4 \gtrless 0$. Seitliche sphärische Aberration.

$$\begin{aligned} \Delta y &= -4S_4 y_0^2 \sigma^3 \cos \varphi \\ \Delta z_1 &= -4S_4 y_0^2 \sigma^3 \sin \varphi. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Aberrationskurven sind Kreise, deren Radius mit dem Quadrat des Axenabstands und der dritten Potenz der Oeffnung wächst.

d) $S_9 \gtrless 0$. Flügelfehler.

31)
$$\Delta y_1 = -2S_9 y_0^2 \sigma_1^3 \cos\varphi (1 + \cos^2\varphi)$$
$$\Delta z_1 = -2S_9 y_0^2 \sigma_1^3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$


Fig. 5.

Die Aberrationskurven werden Kurven 6. Ordnung von der beistehenden Flügelform. Die Kurven, die zu demselben Objektpunkt gehören, haben denselben Knotenpunkt und unterscheiden sich nur durch ihre Dimension.

e) $S_{10} \gtrless 0$. Pfeilfehler.

32)
$$\Delta y_1 = -3S_{10} y_0^3 \sigma^2 \cos^2\varphi$$
$$\Delta z_1 = 0.$$

Die Aberrationskurve besteht aus einem geraden Strich, der sich von dem Gauss'schen Bildpunkt aus nach einer Seite zu erstreckt.

f) $S_3 \gtrless 0$. Seitliche Koma.

33)
$$\Delta y_1 = -S_3 y_0^3 \sigma^2 (1 + 2\cos^2\varphi)$$
$$\Delta z_1 = -S_3 y_0^3 \sigma^2\, 2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

Die Aberrationskurven haben dieselbe Form, wie bei der gewöhnlichen Koma (F in No. 9); nur wachsen ihre Dimensionen mit der dritten Potenz des Achsenabstandes.

g) $S_2 \gtrless 0$ und $S_6 \gtrless 0$. Seitliche Bildwölbungen.

34)
$$\Delta y_1 = -2(S_2 + S_6) y_0^4 \sigma \cos\varphi$$
$$\Delta z_1 = -2\, S_2 \qquad y_0^4 \sigma \sin\varphi.$$

Wir nehmen diese beiden Fehler zusammen, wie oben die Bildwölbung und den Astigmatismus. Die Aberrationskurven sind Ellipsen. Die halbe Differenz der beiden Axen S_6 wird man passend als seitlichen Astigmatismus, die halbe Summe $2S_2 + S_6$ als seitliche Bildwölbung bezeichnen.

h) $S_1 \gtrless 0$. Seitliche Verzeichnung.

35)
$$\Delta y_1 = -S_1 y_0^5$$
$$\Delta z_1 = 0.$$

Dieser Fehler stört die punktförmige Abbildung nicht, er ändert nur die Verzeichnung.

13. Anmerkung über die Fehler in aplanatischen Punktepaaren. Wird der Punkt $y_0 = z_0 = 0$ stigmatisch in den Punkt $y_1 = z_1 = 0$ abgebildet, so besagt das, dass alle vom Ort des Objekts unabhängigen Fehler, also die sphärischen Aberrationen erster und zweiter Stufe B und S_7 verschwinden. Ist dazu noch die Sinusbedingung erfüllt, so verschwinden auch die der ersten Potenz von y_0 proportionalen Fehler F und S_8, weil dann die Abbildung unter Vernachlässigung höherer Potenzen von y_0 scharf sein muss. Die Existenz eines aplanatischen Punktepaares bedingt also die Freiheit des Systems von den Fehlern der sphär. Aberration und der Koma 1. und 2. Stufe.

§ 5. Die Zusammensetzung mehrerer optischer Systeme.

14. Giebt die Eikonaltheorie ohne weiteres einen Ueberblick über die Zahl und Art der möglichen Fehler eines optischen Systems, so bleibt nun noch die bei weitem schwierigere Aufgabe, das Eikonal für ein gegebenes optisches System wirklich auszurechnen und daraus die Grösse der Fehler selbst abzuleiten. Der erste Teil der Aufgabe wird sein, das Eikonal einer einzelnen spiegelnden oder brechenden Fläche auszurechnen, der zweite Teil besteht in der Zusammensetzung beliebig vieler solcher Einzelsysteme. Wir behandeln zunächst die zweite Aufgabe, indem wir uns auf die Zusammensetzung zweier Systeme beschränken. Die Systeme werden immer koaxial vorausgesetzt.

Man bilde die Ebenen $x = c_1$ und $x = c_1 + M_1$ nach Gauss durch das zweite System in zwei Ebenen ab, die durch $x = c_2$ und $x = c_2 + M_2$ gegeben werden mögen und die offenbar die Bildebene und die Austrittspupille des ganzen Systems darstellen. Das Winkeleikonal des ersten Systems sei:

$$W_1 = W_1(p_0, q_0, p_1, q_1),$$

das des zweiten in analoger Bezeichnung:

$$W_2 = W_2(p_1, q_1, p_2, q_2).$$

Das Winkeleikonal des Gesamtsystems besteht nach der geometrischen Bedeutung von W aus der Summe dieser beiden Grössen:

36) $$W = W_1 + W_2,$$

wobei das Problem darin liegt, p_1, q_1 durch p_0, q_0, p_2, q_2 auszudrücken und so W als Funktion der letzteren 4 Variabeln darzustellen.

Diese „Elimination der Zwischenvariabeln“ soll indessen nicht an W, sondern an dem Seidel'schen Eikonal ausgeführt werden, wo sie ausserordentlich viel leichter zu bewerkstelligen ist, sobald man wenigstens von Reihenentwicklungen Gebrauch macht.

Man hat nach 10):

$$S_1 = W_1 + \frac{M_0}{n_0}\frac{y_0^2+z_0^2}{2\lambda_0^2} - \frac{M_1}{n_1}\frac{y_1^2+z_1^2}{2\lambda_1^2} + y_0(\eta_1-\eta_0) + z_0(\zeta_1-\zeta_0).$$

Entsprechend:

$$S_2 = W_2 + \frac{M_1}{n_1}\frac{y_1^2+z_1^2}{2\lambda_1^2} - \frac{M_2}{n_2}\frac{y_2^2+z_2^2}{2\lambda_2^2} + y_1(\eta_2-\eta_1) + z_1(\zeta_2-\zeta_1)$$

und für das Gesamtsystem:

$$S = W + \frac{M_0}{n_0}\frac{y_0^2+z_0^2}{2\lambda_0^2} - \frac{M_2}{n_2}\frac{y_2^2+z_2^2}{2\lambda_2^2} + y_0(\eta_2-\eta_0) + z_0(\zeta_2-\zeta_0),$$

mithin nach (36):

$$S = S_1 + S_2 + (y_0-y_1)(\eta_2-\eta_1) + (z_0-z_1)(\zeta_2-\zeta_1)$$

oder auch nach (12):

$$37)\qquad S = S_1 + S_2 + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial S_1}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2}{\partial z_1}.$$

Es erübrigt, hier $y_1, z_1, \eta_1, \zeta_1$ durch $y_0, z_0, \eta_2, \zeta_2$ auszudrücken und S als Funktion der vier letzteren Variabeln zu finden.

Wir führen jetzt Reihenentwicklungen ein und beschränken uns darauf, Glieder von 6. Ordnung in S mitzunehmen. Teilt man S_1 und S_2 in ihre Terme verschiedener Ordnung ab, so werden die Terme von S bis zur 6. Ordnung inklusive:

$$S = S_1^4 + S_2^4 + S_1^6 + S_2^6 + \frac{\partial S_1^4}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial y_1} + \frac{\partial S_1^4}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial z_1}.$$

In den vier letzten Gliedern dieses Ausdrucks darf man ohne weiteres $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, $\eta_1 = \eta_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$ setzen, da hier die Berücksichtigung der Unterschiede dieser Grössen nur Terme 8. Ordnung erzeugen würde. Anders in den beiden ersten Termen S_1^4 und S_2^4. Es ist:

$$S_1^4(y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1) = S_1^4\left((y_0, z_0, \eta_2 - \frac{\partial S_2}{\partial y_1},\ \zeta_2 - \frac{\partial S_2}{\partial z_1}\right)$$

oder bis zur 6. Ordnung genau entwickelt:

$$S_1^4(y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1) = S_1^4(y_0, z_0, \eta_2, \zeta_2) - \frac{\partial S_1^4}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial y_1} - \frac{\partial S_1^4}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial z_1}$$

und entsprechend:

$$S_2^4(y_1, z_1, \eta_2, \zeta_2) = S_2^4(y_0, z_0, \eta_2, \zeta_2) - \frac{\partial S_1^4}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial y_1} - \frac{\partial S_1^4}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial z_1}.$$

Wenn wir jetzt durch einen Querstrich bezeichnen, dass wir in einer Funktion

y_1, z_1 durch y_0, z_0 und η_1, ζ_1 durch η_2, ζ_2 ersetzt haben, so erhalten wir für die Terme 4. und 6. Ordnung von S:

38) $$S^4 = \bar{S}_1^4 + \bar{S}_2^4$$

39) $$S^6 = \bar{S}_1^6 + \bar{S}_2^6 - \frac{\partial \bar{S}_1^4}{\partial \eta_2} \cdot \frac{\partial \bar{S}_2^4}{\partial y_0} - \frac{\partial \bar{S}_1^4}{\partial \zeta_2} \cdot \frac{\partial \bar{S}_2^4}{\partial z_0}.$$

Damit ist die Elimination der Zwischen-Variabeln mit der beabsichtigten Genauigkeit ausgeführt und der Ausdruck des Gesamteikonals gefunden.

Um uns die Bedeutung der Formel (38) völlig zu vergegenwärtigen, wollen wir die in ihr enthaltenen Regeln explizite ausführen. Wir haben nach (18), indem wir überall den Index 1 anfügen:

$$S_1^4 = -\frac{A_1}{4} R_0^2 - \frac{B_1}{4} \varrho_1^2 - C_1 \varkappa_{01}^2 - \frac{D_1}{2} R_0 \varrho_1 + E_1 R_0 \varkappa_{01} + F_1 \varrho_1 \varkappa_{01},$$

$$R_0 = y_0^2 + z_0^2, \quad \varrho_1 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad \varkappa_{01} = y_0 \eta_1 + z_0 \zeta_1.$$

Analog wird sein:

$$S_2^4 = -\frac{A_2}{4} R_1^2 - \frac{B_2}{4} \varrho_2^2 - C_2 \varkappa_{12}^2 - \frac{D_2}{2} R_1 \varrho_2 + E_2 R_1 \varkappa_{12} + F_2 \varrho_2 \varkappa_{12},$$

$$R_1 = y_1^2 + z_1^2, \quad \varrho_2 = \eta_2^2 + \zeta_2^2, \quad \varkappa_{12} = y_1 \eta_2 + z_1 \zeta_2.$$

Ersetzt man hier y_1, z_1 durch y_0, z_0 und η_1, ζ_1 durch η_2, ζ_2 und führt die Bezeichnung ein:

$$\varkappa_{02} = y_0 \eta_2 + z_0 \zeta_2,$$

so erhält man:

$$S^4 = -\frac{A_1 + A_2}{4} R_0^2 - \frac{B_1 + B_2}{4} \varrho_2^2 - (C_1 + C_2) \varkappa_{02}^2 - \frac{D_1 + D_2}{2} R_0 \varrho_2 + (E_1 + E_2) R_0 \varkappa_{02} +$$
$$+ (F_1 + F_2) \varrho_2 \varkappa_{02}.$$

Diese Gleichung besagt aber: *die Fehler 3. Ordnung eines Gesamtsystems setzen sich aus den Fehlern der Einzelsysteme additiv zusammen.*

Wenn sich ein so einfaches Resultat ergeben hat, so liegt dies allein an der Benutzung der Seidel'schen Variabeln und der Definition der einzelnen Bildfehler durch die Coeffizienten der Eikonalentwicklung grade nach diesen Variabeln. Sowie man zu anderen von System zu System wechselnden linearen Combinationen der Seidel'schen Variabeln übergeht, erhält man für jeden Entwicklungskoeffizienten des zusammengesetzten Eikonals eine umständliche lineare Funktion sämtlicher Fehler der Einzeleikonale. Hier ist also der Punkt, wo der Vorteil der Seidel'schen Variabeln hauptsächlich zur Geltung kommt.

Die Formel (39) lehrt, dass die Fehler 5. Ordnung zwar nicht direct einer additiven Regel unterliegen, dass sich ihre Zusammensetzung aber recht wohl übersehen lässt.

Der Uebergang von der Zusammensetzung zweier Flächen zu beliebig vielen ergiebt sich so unmittelbar, dass ein Anschreiben der entstehenden Summenformeln wohl überflüssig ist.

§ 6. Die Fehler dritter Ordnung eines centrierten Linsensystems. Die Seidel'schen Formeln.

15. Wir führen zum Schluss die Berechnung des Eikonals 4. Ordnung S^4 für ein centriertes Linsensystem vollständig aus, wobei wir ohne Mühe auch Abweichungen der Flächen von der Kugelform mitberücksichtigen können.

Wir betrachten zunächst die Brechung an einer einzelnen Fläche. Die Brechungsindices zu beiden Seiten derselben seien n_0 und n_1. Die x-Axe werde im Sinne der Lichtbewegung positiv gezählt. Ist die brechende Fläche sphärisch, so lautet ihre Gleichung:

$$X - a = r - \sqrt{r^2 - Y^2 - Z^2},$$

wobei a die Abscisse des Scheitels, r der Radius ist und positives r einer gegen das einfallende Licht konvexen Fläche entspricht.

Bis zu Gliedern vierter Ordnung entwickelt gilt:

$$X = a + \frac{Y^2 + Z^2}{2r} + \frac{(Y^2 + Z^2)^2}{8r^3}.$$

Indem wir der Fläche eine beliebige nichtsphärische Rotationsform zuschreiben, setzen wir bis auf Glieder 4. Ordnung genau:

$$X = a + \frac{Y^2 + Z^2}{2r} + \frac{(Y^2 + Z^2)^2}{8r^3}(1 + b), \tag{40}$$

wobei man b als „Deformation" der Fläche bezeichnen kann.

Für die Abstände der vier Ebenen $X = c_0, c_1, c_0 + M_0$ und $c_1 + M_1$ vom Flächenscheitel führe man die Abkürzungen ein:

$$s = a - c_0, \quad s' = a - c_1, \quad t = a - c_0 - M_0, \quad t' = a - c_1 - M_1, \tag{41}$$

dann gilt nach den bekannten Formeln der Gauss'schen Dioptrik auf Grund der konjugierten Lage von Objekt- und Bildebene, Eintritts- und Austrittspupille:

$$\begin{aligned} n_0\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{r}\right) &= n_1\left(\frac{1}{s'} + \frac{1}{r}\right) = K, \\ n_0\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right) &= n_1\left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{r}\right) = L. \end{aligned} \tag{42}$$

K und L stellen zwei bei der Brechung invariante Grössen dar, die man als Abbe'sche Invarianten bezeichnet.

Die Vergrösserungen zwischen beiden Ebenenpaaren werden, da die Bilder vom Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche aus gesehn perspektivisch liegen:

$$\text{43)} \qquad \frac{l_1}{l_0} = \frac{s'+r}{s+r} = \frac{n_0 s'}{n_1 s}, \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{t'+r}{t+r} = \frac{n_0 t'}{n_1 t}.$$

Wir bilden jetzt das **Winkeleikonal** dieser brechenden Fläche, indem wir von den Pnnkten $x = c_0$ nnd $x = c_1$ auf der Axe die Normalen $c_0 N_0$ und $c_1 N_1$ auf die Richtnngen des einfallenden und gebrochenen Strahls fällen, und den Ausdruck berechnen:

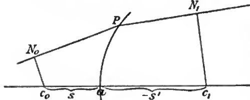


Fig. 6.

$$W = n_0 . N_0 P + n_1 \cdot PN_1,$$

wobei noch P den Schnittpunkt des Strahls mit der brechenden Fläche bedentet, dessen Coordinaten X, Y, Z sind. Sind $m_0, p_0, q_0, m_1, p_1, q_1$, wie oben, die Richtnngskosinns des Strahls vor und nach der Brechung, so ist hiernach:

$$\text{44)} \qquad W = n_0[(X-c_0)m_0 + Yp_0 + Zq_0] - n_1[(X-c_1)m_1 + Yp_1 + Zq_1].$$

Ersetzt man m durch $\sqrt{1-p^2-q^2}$, X dnrch seinen Ansdruck (40) als Funktion von Y und Z und entwickelt bis zn Gliedern 4. Ordnung, so erhält man:

$$\text{45)} \qquad \begin{aligned} W = {} & n_0 s - n_1 s' \\ & + n_0\left[Yp_0 + Zq_0 + \frac{Y^2+Z^2}{2r} - \frac{s}{2}(p_0^2+q_0^2) + (Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3} - \frac{(Y^2+Z^2)(p_0^2+q_0^2)}{4r} - s\frac{(p_0^2+q_0^2)^2}{8}\right] \\ & - n_1\left[Yp_1 + Zq_1 + \frac{Y^2+Z^2}{2r} - \frac{s'}{2}(p_1^2+q_1^2) + (Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3} - \frac{(Y^2+Z^2)(p_1^2+q_1^2)}{4r} - s'\frac{(p_1^2+q_1^2)^2}{8}\right], \end{aligned}$$

Der nächste Schritt ist nun, Y nnd Z aus diesem Ausdrucke zu eliminieren, nm W als Fnnktion nnr von p_0, q_0, p_1, q_1 zu erhalten. Innerhalb der Genauigkeit der Ganss'schen Dioptrik erhält man aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz sofort:

$$\text{46)} \qquad \begin{aligned} Y\,\frac{n_1-n_0}{r} &= n_0 p_0 - n_1 p_1, \\ Z\,\frac{n_1-n_0}{r} &= n_0 q_0 - n_1 q_1. \end{aligned}$$

Bei strenger Rechnnng würden hier noch Glieder 3. Ordnnng hinzukommen, in-

dessen erkennt man es als überflüssig, dieselben abzuleiten, wenn man sich der Minimaleigenschaft von W erinnert. Letztere hat zur Folge, dass kleine Aenderungen von Y und Z nur quadratisch in W eingehn, also Korrekturen 3. Ordnung von Y und Z nur Beiträge 6. Ordnung zu W liefern. Hält man sich daher innerhalb der 4. Ordnung, so folgt, dass man in W die Ausdrücke (46) für Y und Z einsetzen darf.

Es ist weiter von dem Winkeleikonal zum **Seidel'schen Eikonal** überzugehn. Man hat zu diesem Zweck p und q gemäss (7a) durch die Seidel'schen Variabeln zu ersetzen und gemäss (10) einen quadratischen Ausdruck in diesen Variabeln zu W hinzuzufügen. Nun sind aber einerseits die sämtlichen Beziehungen zwischen neuen und alten Variabeln inclusive der Gleichungen (46) lineare und es ändern daher bei dem Uebergang zu den neuen Variablen die einzelnen Terme der Entwicklung (45) von W ihre Ordnung nicht. Andrerseits wissen wir, dass die Entwicklung von S mit Gliedern vierter Ordnung beginnt. Daher kann S^4 nur aus den Gliedern 4. Ordnung von W bestehn. Es gilt also:

$$S^4 = n_0\left\{(Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3} - \frac{(Y^2+Z^2)(p_0^2+q_0^2)}{4r} - s\frac{(p_0^2+q_0^2)^2}{8}\right\}$$
$$- n_1\left\{(Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3} - \frac{(Y^2+Z^2)(p_1^2+q_1^2)}{4r} - s'\frac{(p_1^2+q_1^2)^2}{8}\right\},$$

was man infolge der Gleichungen (42) auch in die Form umsetzen kann:

$$47)\quad S^4 = \frac{1}{8n_1 s'}\left[n_1\frac{Y^2+Z^2}{r} + n_1 s'(p_1^2+q_1^2)\right]^2 - \frac{1}{8n_0 s}\left[n_0\frac{Y^2+Z^2}{r} + n_0 s(p_0^2+q_0^2)\right]^2 + b\frac{(n_0-n_1)}{8r^3}(Y^2+Z^2)^2.$$

Hier darf man innerhalb der beabsichtigten Genauigkeit ohne weiteres für alle Grössen die Werte aus der Gauss'schen Dioptrik einsetzen, insbesondere also die Seidel'schen Variabeln vor und nach der Brechung nach Belieben vertauschen. Um S^4 gleich als Funktion von $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$ zu erhalten, wird man demgemäss an Stelle der Gleichungen (7a) die folgenden benutzen:

$$48)\quad \begin{aligned} p_0 &= \eta_1\frac{\lambda_0}{M_0} - \frac{y_0}{n_0\lambda_0} & \qquad q_0 &= \zeta_1\frac{\lambda_0}{M_0} - \frac{z_0}{n_0\lambda_0} \\ p_1 &= \eta_1\frac{\lambda_1}{M_1} - \frac{y_0}{n_1\lambda_1} & \qquad q_1 &= \zeta_1\frac{\lambda_1}{M_1} - \frac{z_0}{n_1\lambda_1}. \end{aligned}$$

Vor dem Einsetzen dieser Werte in S^4 empfehlen sich noch kleine Umformungen. Man setze zur Abkürzung:

$$49)\quad H = \frac{t}{\lambda_0 n_0} = \frac{t'}{\lambda_1 n_1}, \qquad h = \frac{\lambda_0 s}{M_0} = \frac{\lambda_1 s'}{M_1}.$$

Dann hat man:

$$p_0 = \frac{\eta_1 h}{s} - \frac{y_0 H}{t}, \qquad q_0 = \frac{\zeta_1 h}{s} - \frac{z_0 H}{t}$$

50)

$$p_1 = \frac{\eta_1 h}{s'} - \frac{y_0 H}{t'}, \qquad q_1 = \frac{\zeta_1 h}{s'} - \frac{z_0 H}{t'},$$

und aus (46) unter Berücksichtigung von (41)—(43):

51) $$Y = \eta_1 h - y_0 H, \qquad Z = \zeta_1 h - z_0 H.$$

Benutzen wir wieder die frühere Bezeichnung:

$$y_0^2 + z_0^2 = R_0, \qquad \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \varrho_1, \qquad y_0\eta_1 + z_0\zeta_1 = \varkappa_{01},$$

so folgt unter ständiger Benutzung der Gleichungen (42):

$$Y^2 + Z^2 = H^2 R_0 - 2Hh\varkappa_{01} + h^2\varrho_1$$

52)

$$n_0\left(\frac{Y^2+Z^2}{r}\right) + n_0 s(p_0^2 + q_0^2) = H^2 R_0\left[L - (K-L)\frac{s}{t}\right] + h^2\varrho_1 K - 2Hh\varkappa_{01} L,$$

$$n_1\left(\frac{Y^2+Z^2}{r}\right) + n_1 s'(p_1^2 + q_1^2) = H^2 R_0\left[L - (K-L)\frac{s'}{t'}\right] + h^2\varrho_1 K - 2Hh\varkappa_{01} L.$$

Setzt man diese Ausdrücke in S^4 ein, so erhält man die **fertige Darstellung des gesuchten Eikonals:**

$$8S^4 = + R_0^2 H^4\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right) - 2L(K-L)\left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t}\right) + (K-L)^2\left(\frac{s'}{n_1 t'^2} - \frac{s}{n_0 t^2}\right)\right\},$$

$$+ \varrho_1^2 h^4\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + K^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right)\right\}$$

53)

$$+ 4\varkappa_{01}^2 H^2 h^2\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right)\right\}$$

$$+ 2R_0\varrho_1 H^2 h^2\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + KL\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right) - K(K-L)\left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t}\right)\right\}$$

$$- 4R_0\varkappa_{01} H^3 h\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right) - L(K-L)\left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t}\right)\right\}$$

$$- 4\varrho_1\varkappa_{01} H h^3\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + KL\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right)\right\}.$$

Die Faktoren der 5 letzten Zeilen geben die Fehler dritter Ordnung bei der Abbildung durch eine einzige brechende Fläche an.

16. Wir schreiten sogleich fort zur Betrachtung einer beliebigen Zahl brechender Flächen. Alle zur i-ten Fläche gehörigen Grössen sollen den Index i erhalten. Der Wert des Brechungsexponenten nach der i-ten Fläche sei n_i. Nach

dem Satze aus § 5, dass sich die Fehler dritter Ordnnng einzeln addieren, und durch Vergleich der entstehenden Eikonalentwicklung mit dem früheren allgemeinen Ansatz (18) erhält man:

$$
\begin{aligned}
B &= \tfrac{1}{8} \sum_i h_i^4 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + K_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right\} \\
C &= \tfrac{1}{8} \sum_i H_i^2 h_i^2 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + L_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right\} \\
\text{54)} \quad D &= \tfrac{1}{8} \sum_i H_i^2 h_i^2 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + K_i L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - K_i (K_i - L_i) \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right\} \\
E &= \tfrac{1}{8} \sum_i H_i^3 h_i \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + L_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - L_i (K_i - L_i) \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right\} \\
F &= \tfrac{1}{8} \sum_i H_i h_i^3 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + K_i L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Das sind die Seidel'schen Formeln für die Fehler 3. Ordnnng eines beliebigen centrierten Linsensystems[1]). Sie gestatten in sehr einfacher Weise diese Fehler zu berechnen, sobald einmal alle Grössen, die bei der Gauss'schen Abbildnng in dem Linsensystem in Betracht kommen, bekannt sind. Die früheren auf letztere bezüglichen Formeln seien hier auch nochmals mit einer kleinen Umstellnng und in verallgemeinerter Bezeichnung zusammengestellt, dabei werde zugleich die bisher willkürliche Grösse $\lambda_0 = 1$ gesetzt.

$$
\text{55)} \qquad n_{i-1}\left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{r_i}\right) = n_i\left(\frac{1}{s_i'} + \frac{1}{r_i}\right) = K_i, \qquad n_{i-1}\left(\frac{1}{t_i} + \frac{1}{r_i}\right) = n_i\left(\frac{1}{t_i'} + \frac{1}{r_i}\right) = L_i.
$$

$$
\text{56)} \qquad H_1 = \frac{t_1}{n_0}, \; h_1 = \frac{s_1}{s_1 - t_1}, \; \frac{H_{i+1}}{H_i} = \frac{t_{i+1}}{t_i'}, \; \frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s_i'}, \; H_i h_i = \frac{s_i t_i}{n_{i-1}(s_i - t_i)}.
$$

Bezeichnet man schliesslich mit d_i den Abstand des Scheitels der $i+1$-ten von dem der i-ten Fläche, so hat man:

$$
\text{57)} \qquad d_i = s_{i+1} - s_i' = t_{i+1} - t_i'.
$$

Ist ein Linsensystem durch die Brechnngsexponenten n_i, die Radien r_i, die Abstände d_i nnd die Deformationen b_i gegeben und sind Objektebene nnd Eintrittspupille durch Angabe ihrer Abstände vom ersten Scheitel s_1 und t_1 festgelegt, so kann man nach den Formeln (55)—(57) der Reihe nach alle in den Seidel'schen Formeln vorkommenden Grössen berechnen. Innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik sind die Grössen h_i offenbar proportional

1) Der Einfluss der Deformationen ist von Seidel nicht berücksichtigt, indessen von späteren Autoren hinzugefügt worden (vgl. v. Rohr, Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten, Berlin 1904 pag. 338).



den Axenabständen (Höhen), in welchen die einzelnen brechenden Flächen von einem Strahl geschnitten werden, der von einem axialen Objectpunkt ausgeht. Die s_i und s_i' sind die Schnittweiten desselben Strahls. Die Grössen H_i, t_i und t_i' haben eine analoge Bedeutung für einen von der Mitte der Eintrittspupille ausgehenden Strahl. Es sind also im Ganzen zur Bildung der Fehlerausdrücke zwei Strahlen gemäss der Gauss'schen Dioptrik durch das System zu verfolgen.

Will man zu den numerischen Fehlern übergehn, so hat man mit $\frac{M_x}{\lambda_x} = \frac{s_x'}{h_x}$ (x Ordnungsnummer der letzten brechenden Fläche) in der durch 21a) gegebenen Potenz zu multiplizieren und die ebenda angegebenen numerischen Faktoren hinzuzufügen.

17. Die Petzvalbedingung. In den Seidel'schen Formeln ist ein spezielles merkwürdiges Theorem enthalten, welches sich auf Astigmatismus und Bildwölbung bezieht. Die Subtraktion des Fehlers D von C giebt:

$$C - D = \tfrac{1}{2} \sum H_i^2 h_i^2 (L_i - K_i) \left\{ L_i\left(\frac{1}{n_{i-1}s_i} - \frac{1}{n_i s_i'}\right) - K_i\left(\frac{1}{n_{i-1}t_i} - \frac{1}{n_i t_i'}\right)\right\}.$$

Aus (55) folgt:

$$\frac{1}{n_{i-1}s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} = K_i\left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) - \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i}\right),$$

$$\frac{1}{n_{i-1}t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} = L_i\left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) - \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i}\right),$$

und damit:

$$L_i\left(\frac{1}{n_{i-1}s_i} - \frac{1}{n_i s_i'}\right) - K_i\left(\frac{1}{n_{i-1}t_i} - \frac{1}{n_i t_i'}\right) = \frac{K_i - L_i}{r_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i}\right).$$

Also:

$$C - D = \tfrac{1}{2} \sum H_i^2 h_i^2 (L_i - K_i)^2 \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}\right)\frac{1}{r_i}.$$

Andrerseits folgt aber aus den Gleichungen (55) auch:

$$K_i - L_i = n_{i-1}\frac{t_i - s_i}{t_i s_i},$$

mithin in Rücksicht auf die letzte Gleichung (56)

$$58) \qquad (L_i - K_i) H_i h_i = 1$$

und damit:

$$C - D = \tfrac{1}{2} \sum_i \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}\right).$$

Drückt man C und D durch die Krümmungsradien ϱ_s und ϱ_t der sagittalen und

tangentialen Bildfläche aus und setzt den Brechungsindex des letzten Medinms (n_i der Formeln (25) und (26)) gleich 1, so erhält man:

$$59)\qquad \frac{1}{\varrho_s} - \frac{3}{\varrho_t} = 2 \sum_i \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}\right).$$

Man findet aleo eine Beziebnng zwischen den Krümmnngsradien der beiden Bildflächen, welche nnr von den Radien, nicbt aber von den Abständen, der brecbenden Flächen abhängt. Ist das betreffende System frei von Aberration, Koma nnd Astigmatismus, eodass ein scharfes Bild einer Fläche vom Krümmungsradius $\varrho_s = \varrho_t = \varrho$ zu Stande kommt, eo giebt der Ausdruck:

$$60)\qquad \frac{1}{\varrho} = \sum \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i}\right),$$

nnmittelbar den Krümmungsradius der Fläche, anf welcher dae scharfe Bild liegt. Dieeer Satz heiest nach seinem Entdecker das Petzval'scbe Theorem.

Unter Petzvalbedingung versteht man die Forderung:

$$61)\qquad 0 = \sum \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i}\right),$$

welche für ein von Fehlern dritter Ordnnng überhanpt freies optisches System erfüllt sein mnss.

18. Schlnsebemerkung. Von den Seidel'schen Formeln ans kann man die eigentlicbe praktische Aufgabe angreifen, Linsensysteme zn berechnen, für welche ein oder mehrere Fehler dritter Ordnung verschwinden. Man sieht, daee man es dabei mit lanter rein algebraischen Problemen zn tbnn hat. In einer späteren Mitteilung sollen ältere nnd neuere Probleme dieser Art betrachtet werden.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND IV. Nro. 2.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. II.

Theorie der Spiegeltelescope.

Von

K. Schwarzschild.

Mit 9 Figuren im Text.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1905.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. II.

Theorie der Spiegeltelescope.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 22. Januar 1905.

§ 1. **Einleitung.**

1. In dem Wettkampf zwischen Refraktoren und Reflektoren gewinnen zur Zeit die Reflektoren wieder an Boden. Mannigfache frühere Bedenken in Bezug auf Exaktheit und Stabilität grosser Spiegel sind durch technische Fortschritte neueren Datums beseitigt. Man verwendet jetzt allgemein auf der Vorderseite versilberte Glasspiegel. Da die Dicke der Silberschicht erfahrungsmässig sehr gleichmässig wird, ist die genaue Formgebung auf dieselbe Aufgabe, wie bei Glaslinsen, zurückgeführt. Durchbiegungen und Temperaturdehnungen lassen sich durch geeignete Lagerung (Ritchey, Chicago) auf ein unschädliches Mass beschränken. Der geringen Wetterbeständigkeit (der Silberbelag verliert rasch seinen Hochglanz) beugt man vor, indem man die Instrumente so einrichtet, dass der Spiegel leicht herausgenommen und von Morgen bis Abend frisch versilbert werden kann.

So kommen die Vorzüge der Spiegelteleskope rein zur Geltung, von denen zwei an erster Stelle stehn. Zunächst ist die grössere Billigkeit der Spiegel hervorzuheben. Ein gewöhnliches fachromatisches Objektiv hat vier geschliffene Flächen, das Spiegelteleskop (abgesehn von dem kleinen Planspiegel) nur eine, und an die Glasmasse des Spiegels, wenn sie auch gut sein muss, werden doch nicht die allerhöchsten Anforderungen gestellt. Infolgedessen kann das Preisverhältnis zwischen Linsen und Spiegeln von gleichem Durchmesser bei grossen Dimensionen bis auf 10 : 1 ansteigen.

Dazu kommt die Freiheit der Spiegel von allen Farbenfehlern. Während bei den sog. achromatischen Objektiven das sekundäre Spektrum immer noch der schlimmste aller Fehler ist, tritt beim Spiegel überhaupt keine

Trennung der Farben ein. Das ist verbunden mit der Reflexionsfähigkeit des Silbers weit ins Ultraviolett hinein besonders für photographische und Spektralaufnahmen wertvoll.

Diesen Vorzügen steht wenigstens bei den bisherigen Spiegelteleskopen als wesentlicher *Nachteil die Beschränktheit ihres Gesichtsfelds* gegenüber. Ein parabolischer Spiegel liefert zwar in der Axe ein vollkommenes Bild, aber bereits einen halben Grad von der Axe hat man bei dem Oeffnungsverhältnis $^1/_4$ eine Koma von 29" Ausdehnung. In der folgenden Untersuchung wird nun die Frage gestellt, ob sich in diesem Punkte nicht dadurch ein Fortschritt erzielen lässt, dass man statt des üblichen parabolischen Spiegels mit vorgesetztem Planspiegel zwei Spiegel von geeignet berechneter Form verwendet. Die Antwort ist eine positive. *Es lassen sich Teleskope aus 2 Spiegeln angeben, die bei einem Oeffnungsverhältnis 1:3 dieselbe Ausdehnung des gut brauchbaren Gesichtsfelds (2°—3° Durchmesser) liefern, wie sie z. B. den bei dem Unternehmen der photographischen Himmelskarte verwendeten Normalrefraktoren zukommt.* Damit scheint sich den Spiegelteleskopen ein erweiterter Anwendungsbereich zu erschliessen.

2. *Inhaltsübersicht.* Statt unmittelbar die spezielle im Vorstehenden bezeichnete Aufgabe in Angriff zu nehmen, werden wir zunächst die allgemeine Theorie der Fehler dritter Ordnung eines Spiegelsystems entwickeln. Es ist das ein Analogon, und zwar ein vereinfachtes, zu Seidel's Theorie der Fehler von Linsensystemen, die in der vorausgehenden Mitteilung I. § 6 auseinandergesetzt wurde. Als Anwendung ergiebt sich dann Bekanntes über die Fehler des einzelnen (parabolischen) Spiegels und weiterhin eine vollständige Uebersicht über die praktische Verwendbarkeit von Systemen, die aus zwei Spiegeln zusammengesetzt sind. Ein besonders günstiges System dieser Art wird isoliert. Zum Schlusse wird über den Gültigkeitsbereich der Theorie der Fehler 3. Ordnung hinausgegangen, es werden die vorher erhaltenen Spiegelformen bis zu grossen Oeffnungswinkeln weiter verfolgt. Es wird nämlich das Problem gestellt, ein System aus zwei Spiegeln anzugeben, welches nicht nur einen scharfen Brennpunkt besitzt, sondern in demselben auch strenge die Sinusbedingung erfüllt. Es ist das also ein aplanatisches System in *Abbe's* Bezeichnungsweise, das frei von sphärischer Aberration und Koma ist. Die Spiegelmeridiane ergeben sich aus Differentialgleichungen, die sich merkwürdiger Weise algebraisch integrieren lassen. Für dasjenige System, welches aus der Theorie der Fehler dritter Ordnung in Bezug auf die übrigen Fehler und die allgemeine Anordnung als besonders brauchbar erkannt ist, werden die genauen Spiegelformen aus diesen Integralen berechnet und mit den im Scheitel berührenden Rotationsflächen 2. Grades verglichen.

§ 2 Die Fehler dritter Ordnung eines Spiegelsystems.

Die ganze Entwicklung verläuft in engster Analogie zu der Ableitung der Fehler dritter Ordnung eines Linsensystems in der vorigen Mitteilung I. § 6 Auch die Bezeichnung bleibt fast durchweg dieselbe. Ich werde mich daher begnügen, die Rechenoperationen durchzuführen, ohne nochmals ausführlich auf ihre Begründung einzugehn.

3. Das Eikonal eines einzelnen Spiegels. Der Spiegel sei eine Rotationsfläche. Die x-Axe falle mit der Rotationsaxe zusammen und werde im Sinne der Lichtbewegung positiv gezählt. Der Ueberblick über den Strahlengang wird vereinfacht, wenn man den Spiegel selbst und das ganze System der reflektierten Strahlen an der Tangentialebene im Scheitel des Spiegels gespiegelt denkt, also Fig. 1 durch Fig. 2 ersetzt. Man hat dann den Vorteil, dass die Lichtbewegung immer in einer Richtung erfolgt. Auch tritt die Analogie des Conkavspiegels mit der Convexlinse unmittelbar in Erscheinung.

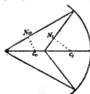


Fig. 1.

Ist der Spiegel sphärisch, so lautet seine Gleichung:

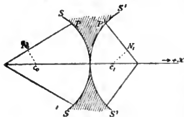


Fig 2.

$$1)\qquad X-a = \sqrt{r^2-Y^2-Z^2}-r$$
$$= -\frac{Y^2+Z^2}{2r}-\frac{(Y^2+Z^2)^2}{8r^3}-\dots$$

Dabei ist a die Abscisse des Spiegelscheitels, r der Radius, welcher für einen Hohlspiegel positiv angesetzt ist, X, Y, Z sind die Koordinaten eines Punktes P auf der Spiegelfläche S. Für den entsprechenden Punkt P' auf der Fläche S' werden die Koordinaten sein:

$$2)\qquad X'-a = a-X, \qquad Y' = Y,\ Z' = Z.$$

Indem wir dem Spiegel eine beliebige nicht sphärische Gestalt zuschreihen, setzen wir bis auf Glieder 4. Ordnung genau:

$$3)\qquad \mathbf{X} = a-\frac{Y^2+Z^2}{2r}-\frac{(Y^2+Z^2)^2}{8d^3}(1+b),$$

und bezeichnen b als die Deformation des Spiegels. Es ist übrigens sofort zu erkennen, dass man die Spiegelflächen innerhalb dieser Genauigkeit stets durch Rotationsellipsoide oder -hyperboloide ersetzen kann, deren Gleichung lautet:

$$4)\qquad \mathbf{X} = +\frac{1}{1+b}\left(\sqrt{1-\left(\frac{Y^2+Z^2}{r^2}\right)(1+b)}-1\right).$$

Sind $x = c_0$, $x = c_1$, $x = c_0 + M_0$, $x = c_1 + M_1$ die Gleichungen von Objektebene, Bildebene, Eintritts- und Austrittspupille und setzt man in genau derselben Bezeichnung, wie in § 6 der ersten Mitteilung:

$$5)\qquad s = a - c_0, \qquad s' = a - c_1, \qquad t = a - c_0 - M_0, \qquad t' = a - c_1 - M_1,$$

so hat man innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik als Ausdruck der konjugierten Lage der beiden Ebenenpaare:

$$6)\qquad \frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{r} = K, \qquad \frac{1}{t} - \frac{1}{r} = \frac{1}{t'} + \frac{1}{r} = L,$$

wo K und L wiederum als Abbe'sche Invarianten zu bezeichnen sind.

Das Vergrösserungsverhältnis in den beiden Ebenenpaaren wird:

$$7)\qquad \frac{l_1}{l_0} = \frac{s'+r}{s-r} = \frac{s'}{s} \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{t'+r}{t-r} = \frac{t'}{t}.$$

Es soll jetzt zunächst das Winkeleikonal zwischen den Ebenen c_0 und c_1 gebildet werden. Es ist:

$$W = N_0 P + P' N_1$$
$$= (X - c_0) m_0 + Y p_0 + Z q_0 - (X' - c_1) m_1 - Y' p_1 - Z' q_1.$$

Die Grössen $m_0, p_0, q_0, m_1, p_1, q_1$ bedeuten, wie früher die Richtungskosinus des eintretenden und reflektierten Strahls.

Ersetzt man m durch $\sqrt{1-p^2-q^2}$, X durch den Ausdruck (3), eliminiert X', Y', Z' mit Hülfe von (2) und entwickelt in Reihen bis zu Gliedern 4. Ordnung, so erhält man:

$$W = s - s' - \frac{Y^2+Z^2}{r} - s \cdot \frac{p_0^2+q_0^2}{2} + s' \frac{p_1^2+q_1^2}{2} + Y(p_0 - p_1) + Z(q_0 - q_1)$$
$$-(1+b)\,\frac{(Y^2+Z^2)^2}{4r^3} + \frac{Y^2+Z^2}{4r}\,[p_0^2+q_0^2+p_1^2+q_1^2] - \frac{s}{8}(p_0^2+q_0^2)^2 + \frac{s'}{8}(p_1^2+q_1^2)^2.$$

In dieser Entwicklung dürfen Y und Z durch ihre innerhalb der Gauss'schen Theorie gültigen Werte:

$$8)\qquad \frac{2Y}{r} = p_0 - p_1, \quad \frac{2Z}{r} = q_0 - q_1$$

ersetzt werden. Damit ist dann W als Funktion von p_0, q_0, p_1, q_1 hergestellt.

Es ist weiter zu Seidel'schen Variabeln und Seidel'schem Eikonal überzugehn. Letzteres besteht bei der Beschränkung auf Glieder 4. Ordnung S^4 aus den Gliedern 4. Ordnung von W, hat also den Wert:

$$S^4 = -(1+b)\frac{(Y^2+Z^2)^2}{4r^3} + \frac{Y^2+Z^2}{4r}[p_0^2+q_0^2+p_1^2+q_1^2] - \frac{s}{8}(p_0^2+q_0^2)^2 + \frac{s'}{8}(p_1^2+q_1^2)^2,$$

oder in Rücksicht auf (6) etwas umgestellt:

$$9)\qquad S^4 = \frac{1}{8s'}\left[s'(p_1^2+q_1^2) + \frac{Y^2+Z^2}{r}\right]^2 - \frac{1}{8s}\left[s(p_0^2+q_0^2) - \frac{Y^2+Z^2}{r}\right]^2 - b\left(\frac{Y^2+Z^2}{4r^3}\right)^2.$$

Die Einführung der Seidel'schen Variabeln selbst vereinfacht sich gegen die Gleichungen I. (48) ff., die beim Linsensystem galten, dadurch, dass jetzt $n = n' = 1$ ist. Man erhält daher an Stelle von I. (48):

$$10)\qquad \begin{aligned} p_0 &= \eta_1\frac{\lambda_0}{M_0} - \frac{y_0}{\lambda_0} & q_0 &= \zeta_1\frac{\lambda_0}{M_0} - \frac{z_0}{\lambda_0}, \\ p_1 &= \eta_1\frac{\lambda_1}{M_1} - \frac{y_0}{\lambda_1} & q_0 &= \zeta_1\frac{\lambda_1}{M_1} - \frac{z_0}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Unter Einführung der Abkürzungen:

$$11)\qquad H = \frac{t}{\lambda_0} = \frac{t'}{\lambda_1} \qquad h = \frac{\lambda_0 s}{M_0} = \frac{\lambda_1 s'}{M_1},$$

schreibt sich dies:

$$12)\qquad \begin{aligned} p_0 &= \eta_1\frac{h}{s} - y_0\frac{H}{t} & q_0 &= \zeta_1\frac{h}{s} - z_0\frac{H}{t} \\ p_1 &= \eta_0\frac{h}{s'} - y_0\frac{H}{t'} & q_1 &= \zeta_1\frac{h}{s'} - z_0\frac{H}{t'}, \end{aligned}$$

womit (8) übergeht in:

$$Y = \eta_1 h - y_0 H \qquad Z = \zeta_1 h - z_0 H.$$

Gebraucht man die Bezeichnungen:

$$13)\qquad R_0 = y_0^2 + z_0^2, \qquad \varrho_1 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \qquad \varkappa_{01} = y_0\eta_1 + z_0\zeta_1,$$

so folgt unter ständiger Benutzung der Gleichungen (6) in engster Analogie zu I. (52):

$$Y^2 + Z^2 = H^2R_0 + h^2\varrho_1 - 2Hh\varkappa_{01}$$

$$s(p_0^2+q_0^2) - \frac{Y^2+Z^2}{r} = H^2R_0\left[L - (K-L)\frac{s}{t}\right] + h^2\varrho_1 K - 2Hh\varkappa_{01}L$$

$$s'(p_1^2+q_1^2) + \frac{Y^2+Z^2}{r} = H^2R_0\left[L - (K-L)\frac{s'}{t'}\right] + h^2\varrho_1 K - 2Hh\varkappa_{01}L.$$

Setzt man diese Ausdrücke in S^4 (Gleichung (9)) ein, so **erhält man die gesuchte Eikonalentwicklung:**

14)
$$
\begin{aligned}
4S^4 = \quad & -R_0^2 H^4\left\{\frac{b}{r^3} + L\left(\frac{3L-2K}{r}\right) + (K-L)^2\left(\frac{s}{t^2} - \frac{s'}{t'^2}\right)\right\} \\
& -\varrho_1^4 h_4 \left\{\frac{b}{r^3} + \frac{K^2}{r}\right\} \\
& -4\varkappa_{01}^2 H^2 h^2 \left\{\frac{b}{r^3} + \frac{L^2}{r}\right\} \\
& -2R_0\varrho_1 H^2 h^2 \left\{\frac{b}{r^3} + \frac{K(2L-K)}{r}\right\} \\
& +4R_0\varkappa_{01} H^3 h \left\{\frac{b}{r^3} + \frac{L(2L-K)}{r}\right\} \\
& +4\varrho_1\varkappa_{01} H h^3 \left\{\frac{b}{r^3} + \frac{KL}{r}\right\}.
\end{aligned}
$$

Wir gehen sofort weiter und bilden:

4. **Die Fehler eines beliebigen Spiegelsystems.** Nach dem in I. § 5 abgeleiteten Satze ergeben sich dieselben durch Superposition der Fehler der Einzelsysteme, welche durch die Entwicklungskoeffizienten des eben gefundenen Eikonals dargestellt werden. Unterscheidet man die verschiedenen hintereinander gesetzten Spiegel durch Indices $i = 1$ bis $i = k$, so findet man in völliger Analogie zu I. § 6 (54):

15)
$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{i=1}^{k} h_i^4 \left\{\frac{b_i}{r_i^3} + \frac{K_i^2}{r_i}\right\} \\
C &= \sum_{i=1}^{k} h_i^2 H_i^2 \left\{\frac{b_i}{r_i^3} + \frac{L_i^2}{r_i}\right\} \\
D &= \sum_{i=1}^{k} h_i^2 H_i^2 \left\{\frac{b_i}{r_i^3} + \frac{K_i(2L_i-K_i)}{r_i}\right\} \\
E &= \sum_{i=1}^{k} h_i H_i^3 \left\{\frac{b_i}{r_i^3} + \frac{L_i(2L_i-K_i)}{r_i}\right\} \\
F &= \sum_{i=1}^{k} h_i^3 H_i \left\{\frac{b_i}{r_i^3} + \frac{K_i L_i}{r_i}\right\}.
\end{aligned}
$$

Die Krümmungsradien ϱ_s und ϱ_t der sagittalen und tangentialen Bildfläche hängen mit C und D durch die Gleichungen zusammen:

16)
$$
\frac{1}{\varrho_t} = 2(D+2C) \qquad \frac{1}{\varrho_s} = 2D.
$$

Alle hier vorkommenden Grössen ergeben sich ans Formeln, die der Ganssschen Theorie zn entnehmen und den Formeln (55), (56), (57), (58) von I. analog sind:

17)
$$\frac{1}{s_i}-\frac{1}{r_i} = \frac{1}{s_i'}+\frac{1}{r_i} = K_i, \qquad \frac{1}{t_i}-\frac{1}{r_i} = \frac{1}{t_i'}+\frac{1}{r_i} = L_i,$$
$$H_1 = t_1, \qquad h_1 = \frac{s_1}{s_1-t_1}, \qquad \frac{H_{i+1}}{H_i} = \frac{t_{i+1}}{t_i'}, \qquad \frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s_i'},$$

18)
$$d_i = s_{i+1}-s_i' = t_{i+1}-t_i',$$
$$H_ih_i(L_i-K_i) = 1.$$

Die Bedentnng der Zeichen sei nochmals erläntert:

r_i ist der Krümmnngsradius des i-ten Spiegels (positiv für Conkavspiegel),
b_i ist die Deformation " (positiv bei Verstärkung der Spiegelkrümmung am Rade).

s_i, t_i, s_i', t_i' sind die Abstände von vier Ebenen vom Scheitel des i-ten Spiegels nnd zwar sind diese Ebenen der Reihe nach:

Das Gauss'sche Bild der Objektebene, welches von den $i-1$ ersten Spiegeln entworfen wird.
Das Gauss'sche Bild der Eintrittspnpille, welches von den $i-1$ ersten Spiegeln entworfen wird.
Das Ganss'sche Bild der Objektebene, welches von den i ersten Spiegeln entworfen wird.
Das Ganss'sche Bild der Eintrittspupille, welches von den i ersten Spiegeln entworfen wird.

Um das Vorzeichen dieser Abstände zn bestimmen, spiegelt man am beqnemsten in Wiederholnng des durch Fig. 1 nnd 2 bezeichneten Verfahrens das ganze spätere System an der Tangentialebene im Scheitel jedes Spiegels. Die Abstände sind dann positiv, wenn nach Ausführung dieser Constrnktion die betreffende Ebene im Sinne der Lichtbewegung vor dem i-ten Spiegel liegt.

Die Grössen h_i sind (im Sinne der Ganss'schen Theorie) den Axenabständen proportional, in welchen die einzelnen Spiegelflächen von einem Strahl getroffen werden, der von der Mitte der Objektebene ausgeht. Für die Grössen H_i gilt dasselbe in Bezng auf einen Strahl, der von der Mitte der Eintrittspupille ausgeht. Die Grössen d_i sind die stets positiven Abstände der Scheitel aufeinander folgender Spiegel. K_i, L_i sind die Abbe'schen Invarianten.

Um die Uebersicht vollständig zu machen, sollen schliesslich auch noch die Formeln zum Uebergang auf die numerischen Fehler nach I. 21a) und 21b) wiederholt werden, wobei wir uns allerdings auf unendlich entferntes Objekt beschränken wollen. Bezeichnet man mit f die Brennweite des Gesamtsystems und setzt:

$$\begin{aligned} B' &= -51.''566\, B^3 f^3 \\ C' &= -56.654\, Cf \\ D' &= -56.654\, Df \\ E' &= 29.692\, E \\ F' &= 81.076\, Ff^2 \end{aligned} \tag{19}$$

so ist:

19a)
$B'v^3$ der Durchmesser des Zerstreuungskreises der sphärischen Aberration
$E'g^3$ die Verzeichnung
$F'gv^2$ die radiale Erstreckung der Koma
$(2C'+D')g^2v$ die radiale / $D'g^2v$ die tangentiale — Axe der durch Astigmatismus und Bildwölbung erzeugten Streuungsellipse

und dabei bedeutet g den Gesichtsfelddurchmesser mit einem Durchmesser von 6^0 als Einheit, v das Oeffnungsverhältnis des Instruments mit dem Oeffnungsverhältnis $^1/_{10}$ als Einheit. Wegen der Bedeutung der Vorzeichen vergleiche man I. No. 11.

5. Die Petzvalbedingung für Spiegelsysteme. Subtrahiert man den Fehler D von C und berücksichtigt (18), so erhält man:

$$C - D = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i}, \tag{20}$$

oder wenn man die Krümmungsradien der tangentialen und sagittalen Bildfläche einführt:

$$\frac{1}{\varrho_t} - \frac{3}{\varrho_s} = 4 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i}, \tag{21}$$

das ist die Petzval'sche Gleichung für Spiegelsysteme. Für ein fehlerfreies Spiegelsystem muss daher die Bedingung erfüllt sein:

$$\Sigma \frac{1}{r_i} = 0,$$

welche besagt, dass ein solches System jedenfalls nur durch eine Kombination von Conkav- und Convexspiegeln (positive und negative r) erhalten werden kann.

§ 3. Der einzelne Spiegel.

6. Wir wollen als erste Anwendung der Formeln des vorigen Paragraphen die Fehler eines einzelnen Spiegels betrachten und uns dabei auf unendlich weit entferntes Objekt ($s = \infty$) beschränken. Indem wir den Index i überall fortlassen, erhalten wir aus den Formeln (17):

$$s = \infty, \qquad K = -\frac{1}{r}, \qquad L = \frac{1}{t} - \frac{1}{r}, \qquad H = t, \qquad h = 1,$$

und damit:

$$B = \frac{b+1}{r^3}, \qquad C = \frac{t^2}{r^3}\left[b + \left(\frac{r}{t} - 1\right)\right]^2, \qquad C - D = \frac{1}{r},$$

$$E = \frac{t^2}{r^3}\left\{b + \left(\frac{r}{t} - 1\right)\left(\frac{2r}{t} - 1\right)\right\}, \qquad F = \frac{t}{r^3}\left\{b - \frac{r}{t} + 1\right\}.$$

Verlegt man nun noch die Eintrittspupille in den Spiegel selbst, bringt also vor dem Spiegel nicht noch einmal eine besondere Blende an, so wird $t = 0$ und es folgt, wenn man gleich zu den numerischen Fehlern übergeht $\left(f = \frac{r}{2}\right)$:

$$B' = -6''\!,4(1+b). \qquad C' = -28''\!,3, \qquad D' = 0.0,$$
22)
$$E' = 0.0, \qquad F' = -20''\!,3.$$

Man wird die Deformation b dazu benutzen, um die sphärische Aberration zum Verschwinden zu bringen, also $b + 1 = 0$ setzen, was gemäss (3) parabolische Gestalt des Spiegels bedeutet. Für den parabolischen Spiegel bleiben dann nur noch die zwei Fehler der sagittalen Bildkrümmung und der Koma vom numerischen Betrage 28",3 resp. 20",3. Was diese Fehler bei verschiedenen Oeffnungsverhältnissen und Gesichtsfeldern ausmachen, lehrt folgendes nach (19a) berechnetes Täfelchen:

Oeffnungsverhältnis	Gesichtsfelddurchmesser	Streuung durch Bildwölbung	Streuung durch Koma
1/10	1/2°	0",4	1",7
	1°	1,6	3,4
	2°	6,3	6,8
	4°	25,2	13,6
1/3	1/2°	1",3	18",7
	1°	5,0	37,4
	2°	20,0	74,9
	4°	83,8	149,8.

7. Zur Beurteilung dieser Zahlen empfiehlt sich der Vergleich mit den gewöhnlichen zweiteiligen Fernrohrobjektiven, wie sie z. B. bei den sog. Normalrefraktoren für die Aufnahmen der photographischen Himmelskarte verwandt werden. Bei diesen Objektiven verschwindet sphärische Aberration, Koma und Verzeichnung, hingegen existieren sagittale und tangentiale Bildwölbung von den numerischen Beträgen $2C'+D' = -104''$ und $D' = -47''$. Die Objektive haben ein Oeffnungsverhältnis $^1/_{10}$ und man betrachtet sie als für ein Gesichtsfeld von 2°,8 Durchmesser brauchbar (die Karten sind Quadrate von 2° Seitenlänge). Unter diesen Bedingungen erhält man als Streuungen durch die Bildwölbung 23" in radialer und 10" in tangentialer Richtung. Von den viel grösseren Streuungen der verschiedenen Farben, die durch das Vorhandensein des sekundären Spektrums erzeugt werden, ist dabei noch nicht die Rede. Vergleicht man diese Angaben mit dem obigen Täfelchen, so sieht man, dass der parabolische Spiegel vom Oeffnungsverhältnis $^1/_{10}$ mit dem zweiteiligen Objektiv vom selben Oeffnungsverhältnis auch in Beziehung auf das brauchbare Gesichtsfeld sehr wohl konkurrieren kann. An Lichtkonzentration wird er durch das Fehlen des sekundären Spektrums sogar überlegen sein, nur ist er wegen des Komafehlers zu exakten Messungen weniger geeignet, da die Koma ein einseitiges Auswachsen der Bilder hellerer Sterne bedingt und dadurch an den Grenzen des Gesichtsfelds systematische Verschiebungen der helleren gegen die schwächeren Sterne erfolgen können [1]).

Geht man zu einem Spiegel vom Oeffnungsverhältnis $^1/_3$ über, so lehrt das Täfelchen, dass hier das brauchbare Gesichtsfeld nur etwa $^1/_2$° Durchmesser hat, und zwar ist es die Koma, die bei geringer Entfernung von der Axe gleich bedenkliche Beträge annimmt.

§ 4. Die Systeme aus zwei Spiegeln.

Indem wir zu der Behandlung von Systemen aus zwei Spiegeln übergehn (wobei natürlich keiner eben sein soll), ist uns das Ziel durch die letzte Bemerkung des vorigen Paragraphen vorgezeichnet. Es wird sich darum handeln, auch bei grossem Oeffnungsverhältnis noch ein ausgedehnteres Gesichtsfeld zu erhalten, also neben der sphärischen Aberration vor allem die Koma zu beseitigen.

Auf die Betrachtung der Verzeichnung, als für astronomische Zwecke unwesentlich, soll durchweg verzichtet werden.

8. Explicite Fehlerausdrücke. Die Bedingungen dafür, dass

1) Vgl. H. C. Plummer, Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc. Vol. 62. pag. 352 und Vol. 63 pag. 16.

die sphärische Aberration und die Koma verschwinden, schreiben sich für 2 Spiegel:

23)
$$B = h_1^4\left(\frac{b_1}{r_1^3}+\frac{K_1^2}{r_1}\right)+h_2^4\left(\frac{b_2}{r_2^3}+\frac{K_2^2}{r_2}\right) = 0,$$

$$F = h_1^3 H_1\left(\frac{b_1}{r_1^3}+\frac{K_1 L_1}{r_1}\right)+h_2^3 H_2\left(\frac{b_2}{r_2^3}+\frac{K_2 L_2}{r_2}\right) = 0.$$

Astigmatismus und Bildwölbung sind bestimmt durch:

24)
$$D = h_1^2 H_1^2\left\{\frac{b_1}{r_1^3}+\frac{K_1(2L_1-K_1)}{r_1}\right\}+h_2^2 H_2^2\left\{\frac{b_2}{r_2^3}+\frac{K_2(2L_2-K_2)}{r_2}\right\},$$

$$C-D = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}.$$

Man sieht aus den beiden ersten Gleichungen, dass man bei beliebiger Anordnung des Spiegelsystems die Deformationen b_1 und b_2 so wählen kann, dass sphär. Aberration und Koma beseitigt werden. Es fragt sich, welche Bildwölbungsfehler C, D dann übrig bleiben.

Man wird also b_1 und b_2 aus den beiden ersten Gleichungen eliminieren und in dem Ausdruck von D einsetzen. Dies geschieht, indem man die Form bildet:

$$B \,.\, H_1 H_2 - F(h_1 H_2 + h_2 H_1) + D \,.\, h_1 h_2,$$

deren Wert bei dem Verschwinden vom B und F gleich $h_1 h_2 D$ ist. Man findet sofort auf diese Art:

$$h_1 h_2 \,.\, D = \frac{h_1^3 H_1}{r_1} K_1(K_1-L_1)(h_1 H_2 - h_2 H_1)$$

$$+\frac{h_2^3 H_2}{r_2} K_2(K_2-L_2)(h_2 H_1 - h_1 H_2)$$

oder nach (18):

$$h_1 h_2 D = -(h_1 H_2 - h_2 H_1)\left(\frac{h_1^2}{r_1} K_1 - \frac{h_2^2}{r_2}\; K_2\right).$$

Es sollen nun alle hier vorkommenden Grössen durch die Spiegelradien, den Spiegelabstand d_1 (kurz d) und die durch $t_1 = H_1$ festgelegte Entfernung der Eintrittspupille ausgedrückt werden. Dabei sei das Objekt unendlich weit entfernt: $s_1 = \infty$. Es folgt aus den Gleichungen (17):

$$K_1 = -\frac{1}{r_1}, \quad s_1' = -\frac{r_1}{2}, \quad s_2 = d - \frac{r_1}{2}, \quad K_2 = \frac{1}{d-\frac{r_1}{2}} - \frac{1}{r_2},$$

25)
$$h_1 = 1, \quad H_1 = t_1, \quad h_2 = 1 - \frac{2d}{r_1}, \quad H_2 = t_1 \frac{t_2}{t_1'} = t_1 + d\frac{t_1}{t_1'} = t_1 + d\left(1 - \frac{2t_1}{r_1}\right)$$

und damit:

$$h_1 H_2 - h_2 H_1 = d, \qquad \frac{h_1^2}{r_1} K_1 - \frac{h_2^2}{r_2} K_2 = -\frac{2}{r_1^2} + \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2d}{r_1 r_2}\right]^2,$$

$$D = \frac{d}{1-\frac{2d}{r_1}} \left\{ -\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2d}{r_1 r_2}\right]^2 + \frac{2}{r_1^2} \right\},$$

$$C = D + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Man erkennt, dass die durch t_1 bezeichnete Stellung der Eintrittspupille weggefallen ist, wie das nach dem Satze aus Mitteilung I. No. 11 vorauszusehen war. Es sind also nur die Krümmungsradien r_1, r_2 und die Spiegeldistanz d für die übrig bleibenden Bildfehler massgebend.

Vor der weiteren Diskussion empfiehlt es sich, diese drei Grössen an die Bedingung zu binden, dass die Brennweite des Systems den vorgeschriebenen Wert f haben soll. Indem man die Vergrösserung zwischen Objekt- und Bildebene betrachtet bei unendlich entferntem Objekt, erkennt man sofort, dass der Wert der Brennweite:

$$f = -s_1' \cdot \frac{s_2'}{s_2}$$

ist. Aus den eben abgeleiteten Beziehungen folgt:

26)
$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{4d}{r_1 r_2}.$$

Eliminiert man hiermit r_2 aus den Ausdrücken von C und D, so erhält man:

27)
$$D = \frac{d}{1-\frac{2d}{r_1}} \left(\frac{2}{r_1^2} - \frac{1}{4f^2}\right),$$

$$C = \frac{1}{4f^2} \cdot \frac{2f-d}{1-\frac{2d}{r_1}}.$$

Das sind bereits die fertigen Ausdrücke für die restierenden Bildfehler. Es erübrigt die Ableitung der Grösse der Deformationen b_1 und b_2 aus den beiden Bedingungen $B = 0$ und $F = 0$. Löst man diese beiden in b_1 und b_2 linearen Gleichungen auf, führt für sämtliche Grössen die in (25) gegebenen

Werte ein und eliminiert schliesslich wiederum r_2 mit Hülfe von (26), so erhält man:

$$b_1 = -1 - \frac{r_1^2}{4df^2}\left(1 - \frac{2d}{r_1}\right),$$

28)

$$b_2 = \frac{1}{d} \cdot \frac{2fr_1^2}{(r_1 - 2f)^2} - \left(\frac{r_1 + 2f}{r_1 - 2f}\right)^2.$$

Wir merken noch die Formel für den Abstand der Bildebene hinter dem letzten Spiegel $(-s_2')$ an:

28a)

$$-s_2' = f \cdot \frac{s_2}{s_1'} = f\left(1 - \frac{2d}{r_1}\right).$$

Für die Beurteilung des Strahlengangs ist schliesslich wichtig das Verhältnis $\frac{h_2}{h_1}$ der Höhen, in welchen ein von einem axialen Objekt ausgehender Strahl die beiden Spiegel schneidet, weil dasselbe das erforderliche Verhältnis der Spiegelradien bestimmt. Wir wollen diese Grösse zur Abkürzung mit λ bezeichnen. Es ist:

29)

$$\lambda = \frac{h_2}{h} = \frac{s_2}{s_1'} = 1 - \frac{2d}{r_1}.$$

9. **Uebersicht über die Systeme und ihre Fehler.** Die erste Frage wird sein nach einem (abgesehn von der Verzeichnung) fehlerfreien Spiegelsystem. Es giebt ein solches, denn es verschwinden C und D, wenn:

$$d = 2f \qquad r_1 = \pm 2\sqrt{2}f.$$

wird. Aus den Bedingungen, dass d positiv und das Bild reell sein muss, folgt, dass f positiv, r_1 negativ zu nehmen ist. Für r_2 ergiebt sich nach der Petzvalbedingung der Wert $r_2 = 2\sqrt{2}f$. Ferner wird $-s_2' = (1 + \sqrt{2})f$. Das System und der Strahlengang in denselben wird durch die beistehende Figur veranschaulicht. Es ist klar, dass dasselbe schon dadurch, dass die Länge das doppelte der Brennweite beträgt, impraktikabel ist und dass die gegenseitige Verdeckung der Spiegel die Ausnutzung eines grössern Gesichtsfelds überhaupt nicht zulässt, wie man auch Durchbohrungen in denselben anbringen mag.

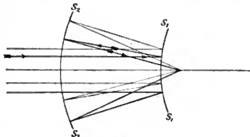


Fig. 3.

Man wird daher den Gedanken an ein fehlerfreies System aufgeben und sich darauf beschränken müssen, aus den praktikabeln Formen solche mit möglichst kleinen Streuungen auszusuchen. Für die praktische Brauchbarkeit bestimmend ist die Bedingung, dass der eine Spiegel den andern nicht zu sehr verdecken darf. Es muss also das Grössenverhältnis des zweiten Spiegels zum ersten hinreichend von 1 verschieden sein. Die Fälle, wo der zweite (d. i. in Wirklichkeit der dem Objekte näher stehende) Spiegel grösser als der erste Lichtauffangende ist, scheiden aus, weil die Grösse des ersten Spiegels das Oeffnungsverhältnis bestimmt und man dann dem zweiten Spiegel einen ungebührlich grossen Durchmesser geben müsste. Es bleiben also nur die Fälle, wo der zweite Spiegel der kleinere ist. Hier hat man zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem der zweite Spiegel das vom ersten reflektierte Licht vor seiner Vereinigung abfängt (λ positiv) oder zwischen erstem und zweiten Spiegel ein Brennpunkt liegt (λ negativ). Letzterer Unterfall erweist sich als der in jeder Hinsicht ungünstigere, da die Bedingung $\lambda = 1 - \frac{2d}{r_1} < 0$ bei zulässigen Werten der Spiegeldistanz d zu kleine Werte von r_1, also zu starke Krümmungen und als Folge davon zu starke restierende Bildfehler C und D ergiebt. So bleibt schliesslich nur der erste Unterfall übrig, bei welchem der Strahlengang im wesentlichen mit dem des Cassegrain-Reflektors übereinstimmt. (Vgl. Fig. 9).

Eine Uebersicht über die hier auftretenden Verhältnisse giebt das folgende Täfelchen. Die Brennweite f (hier stets positiv) ist gleich 1 gesetzt.

Die Systeme sind geordnet nach dem Grössen-Verhältnis λ des zweiten kleinen zum ersten grossen Spiegel. Der Durchmesser des letzteren ist zu $^1/_3$ der Brennweite vorausgesetzt $\left(v = \frac{10}{3}\right)$. Unter V ist das infolge der Vorschaltung des kleinen Spiegels übrigbleibende wirksame Oeffnungsverhältnis $\left(V = \frac{1}{3}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$ angegeben. Die Grösse $-s_2'$ giebt den Abstand der Platte vom zweiten Spiegel (für $f = 1$ numerisch identisch mit λ). Darunter folgt die Distanz d der beiden Spiegel und ihre Krümmungsradien r_1 und r_2. Die Deformationen b_1 und b_2 sind nach den Formeln (28) erhalten und haben nach ihrer Definition den Unterschied zwischen dem Paraboloid vom Parameter r_1 resp. r_2 und seiner Krümmungskugel im Scheitel zur Einheit. Schliesslich folgen die beiden vornehmlich interessierenden Grössen, nämlich die radialen und tangentialen Streuungen Δy und Δz infolge der Fehler C und D, berechnet nach den Formeln (19), (19a), (27), (29):

$$\Delta y = -5''\!,243\,\frac{1}{\lambda}\left[4 + (1-\lambda)\left(\frac{4}{r_1} - \frac{3}{2}\,r_1\right)\right] \qquad \Delta z = -5''\!,243\,\frac{d}{\lambda}\left(\frac{8}{r_1^3} - 1\right),$$

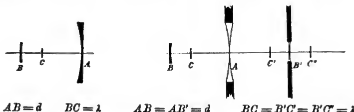
welche für das Oeffnungsverhältnis $^1/_3$ und dem Gesichtsfelddurchmesser von 2° ($\varrho = {}^1/_3$) den Werten (27) gemäss (19) und (19a) entspringen.

		I.	II.	III.	IV.
Verhältnis der Spiegelradien	λ:	0,3	0,4	0,5	0,6
Wirksame Oeffnung	V:	$^1/_{3,1}$	$^1/_{3,3}$	$^1/_{3,5}$	$^1/_{3,7}$
Abstand der Platte vom zweiten Spiegel	$-s_2'$:	0,3	0,4	0,5	0,6

		I.			II.			III.				IV.			
Abstand der Spiegel		1,05	1,4	1,75	0,9	1,2	1,5	0,75	1,0	1,25	1,50	0,6	0,8	1,0	1,2
Krümmungsradien	r_1	3,0	4,0	5,0	3,0	4,0	5,0	3,0	4,0	5,0	6,0	3,0	4,0	5,0	6,0
	r_2	1,8	1,2	1,0	2,4	1,6	1,33	3	2	1,67	1,5	3,6	2,4	2,0	1,8
Deformationen	b_1	− 2,9	−4,4	−6,4	− 4,0	−6,3	−9,3	−5,5	−9,0	−13,5	−19,0	− 7,7	−13,0	−19,7	−28,0
	b_2	+26,4	+2,4	−0,15	+35,0	+4,3	+0,7	+47,0	+7,0	+1,97	+ 0,5	+65,0	+11,0	+ 3,82	+ 1,63
Radiale Streuung		− 31″	−9″	+12″	−27″	−13″	0″	−25″	−16″	−7″	− 2″	−24″	−17″	−10″	− 6″
Tangentiale Streuung		+ 2″	+12″	+21″	+1″	+8″	+13″	+1″	+5″	+9″	+12″	+ 1″	+ 3″	+ 6″	+ 8″.

Man erkennt in dieser Tabelle eine Reihe von Systemen, welche ein brauchbares Gesichtsfeld von 2° Durchmesser liefern und ihrer ganzen Anordnung nach zulässig sind. Eine schärfere Isolierung der besten Systeme erfolgt durch die Betrachtung der

10. **Silhouettierung in den Spiegelsystemen.** Darunter verstehe ich die gegenseitigen Verdeckungen der beiden Spiegel und der in der Bildebene befindlichen photographischen Platte. Man gewinnt eine Uebersicht über die ziemlich verwickelten Verhältnisse, indem man das ursprüngliche System mit dem grossen Spiegel A, dem kleinen B und der ebenfalls kreisförmig gedachten Platte C zunächst durch Spiegelung an den Scheitelebenen der beiden Spiegel in der schon oben erläuterten Weise abbildet. So entsteht Figur 5 aus Figur 4. Die Abstände der verschiedenen Blenden sind beigeschrieben.



$AB = d \quad BC = \lambda$

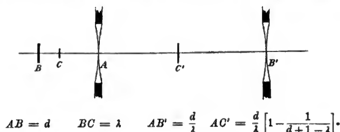
Fig. 4.

$AB = AB' = d \qquad BC = B'C' = B'C'' = \lambda$

Fig. 5.

Auch sind durch Ausziehen resp. Strichelung die abblendenden Teile von den durchlässigen unterschieden. Man verfahre weiter nach einem von Abbe und

Helmholtz stets verwandten Prinzipe und bilde sämtliche Blenden durch die vor ihnen befindlichen Teile des optischen Systemes nach vorne hin ab, suche also das durch A entworfene Bild von B' und C', sowie das durch B' und A entworfene Bild von C''. Man erhält durch einfache Ueberlegungen nach der Gauss'schen Theorie so aus Figur (5) die in Figur (6) angegebenen Verhältnisse:



$$AB = d \qquad BC = \lambda \qquad AB' = \frac{d}{\lambda} \quad AC' = \frac{d}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{d+1-\lambda}\right].$$

Fig. 6.

Bezeichnet man mit dem betreffenden Buchstaben zugleich den Durchmesser der Blende, so gilt dabei:

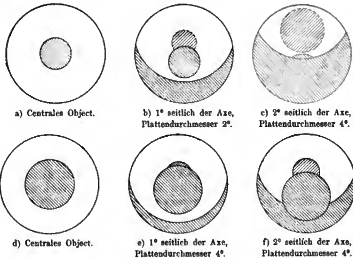
$$B = \lambda A \qquad B' = A \qquad C' = \frac{C}{\lambda}\frac{1}{d+1-\lambda}.$$

Ausser den zwei gleich grossen Aussenblenden A und B' sind also noch drei Innenblenden B, C und C' in den Strahlengang eingeschoben, von denen die beiden letzten von der photographischen Platte selbst herrühren. Das Bild von C'' fällt ins Unendliche und kommt nicht in Betracht.

Lässt man jetzt ein Büschel von Parallelstrahlen von irgend einem unendlich entfernten Objektpunkt aus einfallen, so gelangen diejenigen Strahlen bis zur Platte, die in ihrem ungebrochenen gradlinigen Verlauf dieses Blendensystem zu durchsetzen vermögen. Man erhält daher die wirksamen Teile der Spiegel, indem man das ganze Blendensystem auf eine zur Richtung nach dem Objekt senkrechte Ebene projiziert und die Flächenstücke sucht, die nicht von der Projektion einer undurchlässigen Blende bedeckt werden. Bei kleiner Distanz des Objektes von der Axe wird man sich erlauben dürfen, die Projektionsellipsen durch Kreise zu ersetzen und nur auf die Mittelpunktsverschiebung derselben Rücksicht zu nehmen.

Statt einer allgemeinen Diskussion mit ihren Fallunterscheidungen gebe ich einige Beispiele. Sie beziehen sich sämtlich auf das Oeffnungsverhältnis $^1/_3$. Die Figuren 7a)—c) gelten für das System $\lambda = 0{,}3$, $d = 1{,}4$, die Figuren d)—f) für das System $\lambda = 0{,}5$, $d = 1{,}25$. Beide Systeme sind, nach den oben gegebenen Streuungen zu urteilen, für ein Gesichtsfeld von 2°,5—3° Durchmesser brauchbar, sie sind so ausgewählt, dass sie nahezu frei von Bildwölbung

und fast nur mit Astigmatismus behaftet sind. Auf den ersten Blick würde man es für günstiger halten, dem Vorderspiegel nur 0,3 — statt 0,5 — des Radius des grossen Spiegels zu geben, da hiermit ein Gewinn an Lichtstärke im Verhältnis $\frac{1-0.3^2}{1-0,5^2} = 1,21$ verbunden ist und da man ausserdem ungern viel von den praktisch leichter exakt herzustellenden mittleren Spiegelpartieen abblenden wird. Indessen lehrt ein Blick auf die Figuren, dass dieser Vorzug nur in der Axe gilt und dass, wenn man nur wenig aus der Axe herausgeht, das System mit dem kleineren Vorderspiegel ($\lambda = 0,3$) an einer viel stärkeren Silhouettierung leidet als das System ($\lambda = 0,5$). Insbesondere stört bei ersterem System, dass die photographische Platte schon bei einem Durchmesser von 2° selbst stark silhouettierend auf ihre Ränder wirkt, während man doch in Praxis sowohl Raum für die Fassung der Platte braucht, als auch der Uebersicht wegen die Platte gern grösser nehmen wird, als das eigentlich brauchbare Gesichtsfeld.



a) Centrales Object. b) 1° seitlich der Axe, Plattendurchmesser 2°. c) 2° seitlich der Axe, Plattendurchmesser 4°.

d) Centrales Object. e) 1° seitlich der Axe, Plattendurchmesser 4°. f) 2° seitlich der Axe, Plattendurchmesser 4°.

Die von rechts oben nach links unten schraffierten Teile werden von der photographischen Platte selbst silhouettiert.

Fig. 7.

11. Auswahl des besten Systems. So scheint es mir, dass das System $\lambda = 0,5$, $d = 1,25$ für die Praxis im Grossen und Ganzen die günstigsten Verhältnisse aufweist, womit nicht gesagt sein soll, dass für besondere Zwecke sich nicht eine der benachbarten Formen mehr empfehle. Ich stelle die Daten seiner Konstruktion hier nochmals zusammen.

Brennweite $f = 1$ Spiegelabstand $d = 1{,}25$.

Durchmesser des grossen Spiegels:		0,333.
„ „ kleinen „:		0,167.
Wirksames Oeffnungsverhältnis		$1/_{3,5}$.
Krümmungsradien	r_1:	5,0.
	r_2:	1,67.
Deformationen	b_1:	−13,5.
	b_2:	+1,97.
Radiale } Streuung 1° seitlich der Axe:	Δy:	−7″.
Tangentiale } Streuung 1° seitlich der Axe:	Δz:	+9″.

Das System liefert 1°,4 von der Axe nahe kreisförmige Bilder von etwa 16″ Durchmesser, hat also bei dem Oeffnungsverhältnis $1/_{3,5}$ etwa dieselbe brauchbare Gesichtsfeldgrösse wie die erwähnten Normalrefraktoren vom Oeffnungsverhältnis $1/_{10}$. Würde man das Oeffnungsverhältnis auf den abnorm hohen Werth 1 : 1,2 vergrössern, so würde immer noch ein brauchbares Gesichtsfeld von etwa 1°,5 Durchmesser übrig bleiben.

§ 5. Das aplanatische Spiegelsystem.

12. Wenn man an die Konstruktion eines Spiegels vom Oeffnungsverhältnis 1 : 3 oder gar 1 : 1 denkt, darf man nicht vergessen, dass die ganze bisherige Theorie der Fehler dritter Ordnung nur eine für paraxiale Strahlen gültige Annäherung ist. Man wird daher versuchen müssen, ein Spiegelsystem beliebig grosser Oeffnung zu errechnen, welches in aller Strenge frei von sphärischer Aberration ist und zugleich strenge die Sinusbedingung erfüllt, da mit letzterer Bedingung nach I. No. 7 und 13 auch das Verschwinden der Koma gesichert ist. Der Brennpunkt des gewünschten Systems muss also nach Abbe's Bezeichnung ein aplanatischer Punkt sein, weshalb das ganze System „aplanatisch" heissen möge.

Bei der gänzlich veränderten Behandlungsweise soll auch die Bezeichnung unabhängig von der bisher benutzten in der aus Figur (8) ersichtlichen Weise gewählt werden. Die Beziehung wird unten wieder herzustellen sein. Der kleine (früher zweite) Spiegel möge mit S, der grosse zuerst das Licht auffangende mit S' bezeichnet werden. Die beiden Forderungen an das Spiegelsystem lassen sich in folgender Weise formulieren:

1) Es sollen die von einem unendlich fernen Punkt in der Axe des Systems, (die wir horizontal denken wollen) kommenden Strahlen in dem Brennpunkt F vereinigt werden. Ein andrer Ausdruck dieser Bedingung ist, dass die Weglänge von dem unend-

lich fernen Objekt bis zum Brennpunkte für alle Strahlen die gleiche sein soll, nach dem unmittelbar aus der Minimaleigenschaft des Eikonals folgendem Satze, dass die optische Weglänge aller Strahlen, die von einem Punkt ausgehen und in einem zweiten Punkte vereinigt werden, dieselbe ist. Zeichnet man die Bildebene senkrecht zur Axe durch den Brennpunkt und bezeichnet die Strecke auf dem axenparallelen einfallenden Strahl vom Schnittpunkt mit der Bildebene an bis zum Schnittpunkt mit dem Spiegel S' durch x', die Länge des Strahls zwischen S' und S durch ϱ', zwischen S und dem Brennpunkt durch ϱ, so lautet unsere Bedingung also:

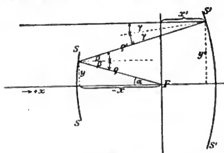


Fig. 8.

30) $$\varrho+\varrho'+x' = 2(e+1),$$

wobei e eine Konstante bedeutet.

2) Es soll die Sinusbedingung erfüllt sein. Rückt der Objektpunkt weiter und weiter fort, so werden die Sinus der Einfallswinkel offenbar immer mehr proportional den Strahlabständen y' von der Axe bei ihrem Auftreffen auf das Spiegelsystem. Nennt man α den Winkel am Brennpunkt, so lautet die Sinusbedingung daher für unendlich entferntes Objekt:

$$\frac{y'}{\sin\alpha} = \text{const.}$$

Wir wollen diese Konstante gleich 1 setzen, also fordern:

31) $$y' = \sin\alpha.$$

Hierdurch legen wir nur die Masseinheit, in der wir die Längen messen wollen, fest und zwar, wie aus I. Gleichung (16) leicht zu sehen ist, in solcher Weise, dass die Brennweite des ganzen Systems gleich 1 wird.

13. Die Aufgabe besteht nun darin, die Gleichungen der Meridiankurven beider Spiegel so zu bestimmen, dass diesen beiden Bedingungen genügt wird. Man bezeichne noch mit β und γ die Winkel zwischen dem Strahl und den Normalen auf den Spiegeln. Man denke sich dann die Gestalt der beiden Spiegel dadurch bestimmt, dass man zunächst ϱ als Funktion von α festlegt — hierdurch ist die Gleichung des Meridianschnitts des Spiegels S in Polarkoordinaten gegeben — und ferner auch β und ϱ' oder x, als Funktionen von α giebt, was eine besondere Art der Parameterdarstellung für den Meridianschnitt des Spiegels S' bedeutet.

Man hat unter diesen Festsetzungen zunächst für die Neigung β der Spiegelnormalen von S gegen den Radiusvektor ϱ:

32) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha} = \operatorname{tg}\beta.$$

Ferner liest man aus der Figur die Beziehungen ab:

33) $$2\beta = \alpha+2\gamma,$$

34) $$x'+\varrho\cos\alpha = \varrho'\cos 2\gamma,$$

35) $$y' = \varrho\sin\alpha+\varrho'\sin 2\gamma.$$

Die Gleichungen (30)—(35) enthalten die mathematische Formulierung unserer Aufgabe. Eliminiert man zunächst den Winkel γ mit Hülfe von (33), die Strecke x, mit Hülfe von (34) und y' nach (31), so behält man das System:

36) $$\sin\alpha = \varrho\sin\alpha+\varrho'\sin(2\beta-\alpha).$$

37) $$\varrho+\varrho'+\varrho'\cos(2\beta-\alpha)-\varrho\cos\alpha = 2(e+1).$$

38) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha} = \operatorname{tg}\beta.$$

Eliminiert man hier noch ϱ', so bleiben die Gleichungen:

$$2(e+1) = \varrho(1-\cos\alpha)+(1-\varrho)\sin\alpha\operatorname{cotg}\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha} = \operatorname{tg}\beta.$$

Die erste Gleichung ergiebt nach $\operatorname{tg}\beta$ aufgelöst:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\frac{e+1-\varrho+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{e+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Es ergiebt sich also folgende Differentialgleichung 1. Ordnung für den Meridianschnitt des Spiegels S:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\frac{e+1-\varrho+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{e+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Dieselbe lässt sich in sehr einfacher Weise integrieren. Setzt man zunächst:

$$\xi = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

so erhält man die Gleichung in algebraischer Form:

38) $$\frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\xi} = \frac{(e+1-\varrho)\xi+1}{e\xi+1}.$$

Führt man weiter die neue Variable η ein durch:

$$\frac{\xi}{\varrho} = \eta, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\partial\varrho}{\partial\xi}\frac{\xi}{\varrho^2},$$

so folgt:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\xi-\eta}{1+e\xi}$$

oder:

$$[1+e\xi]\frac{\partial\eta}{\partial\xi} + \eta = \xi.$$

Integrierender Faktor dieser Differentialgleichung ist:

$$[1+e\xi]^{\frac{1}{e}-1}.$$

Multipliziert man mit demselben und integriert, so findet man:

$$\eta(1+e\xi)^{\frac{1}{e}} = \int d\xi\,\xi(1+e\xi)^{\frac{1}{e}-1}$$

$$= \int d\xi\,\frac{(1+e\xi)^{\frac{1}{e}} - (1+e\xi)^{\frac{1}{e}-1}}{e}$$

$$= \frac{(1+e\xi)^{\frac{1}{e}+1}}{e(e+1)} - \frac{(1+e\xi)^{\frac{1}{e}}}{e} + c,$$

wo c die Integrationskonstante ist, oder in etwas anderer Form:

$$\eta = c(1+e\xi)^{-\frac{1}{e}} + \frac{\xi-1}{e+1}.$$

Führt man die ursprünglichen Variabeln α und ϱ wieder ein, so erhält man die Polargleichung für den Spiegel S:

39) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{e+1} + c\left(e+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{e}}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1+e}{e}}.$$

Hiermit ist die Aufgabe im wesentlichen gelöst. Es erübrigt noch, x' als Funktion von α anszndrücken, nm die Form des Spiegels S' zu erhalten.

Man hat nach 30):

$$x' = 2(e+1) - \varrho - \varrho'.$$

Aus 36) und 37) folgt durch Elimination von β:

$$\varrho' = 1 + e - \varrho \sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}(1-\varrho)^2}{1+e-\varrho\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

nnd damit:

$$x' = e + 1 - \varrho\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}(1-\varrho)^2}{1+e-\varrho\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

oder:

$$x' = e + 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\varrho\left(1+e-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+e-\varrho\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Setzt man hier für ϱ den Ausdruck 39) ein und fügt die Sinusbedingung 31) hinzu, so geben die Formeln:

40) $$x' = e + 1 - \frac{\sin^2\alpha}{4(e+1)} - \frac{1}{c(e+1)^2}\left(e+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^{2+\frac{1}{e}}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{e}}$$
$$y' = \sin\alpha.$$

die rechtwinklichen Coordinaten für den Meridianschnitt des Spiegels S' als Funktionen des Parameters α.

15. Man vergegenwärtige sich noch den Zusammenhang der beiden Constanten c und e mit den geometrischen Abmessungen des Spiegelsystems. Das ist zugleich der Ort, die Beziehung zu der früheren Bezeichnnngsweise herznstellen. Für einen in der Axe verlaufenden Strahl hat man aus der Figur 8): $\varrho = SF = \lambda$, wo λ, wie früher, bei der Brennweite $f = 1$ den Abstand des Brennpunktes vom kleinen Spiegel S bezeichnet, und ansserdem $\varrho + x' = \varrho + \varrho' = d$ wo d der Abstand beider Spiegel ist. Andrerseits folgt für $\alpha = 0$ ans den Formeln 39) und 40):

$$\frac{1}{\varrho} = c(1+e)^{-\frac{1}{e}}, \qquad x' = e + 1 - \frac{(e+1)^{\frac{1}{e}}}{c}$$

und durch Vergleich ergiebt sich:

41) $$e + 1 = d, \qquad c = \frac{d^{\frac{1}{d-1}}}{\lambda}$$

Zur weiteren Vergleichung mit den früheren genäherten Ableitungen sollen die jetzigen Ausdrücke noch in Reihen entwickelt werden. Man erhält direkt aus 39) die folgende Entwicklung von ϱ nach Potenzen von $\sin^2\frac{\alpha}{2}$:

$$42)\qquad \frac{\varrho}{\lambda} = 1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1-\lambda}{d}\right)+\sin^4\frac{\alpha}{2}\left[\left(1+\frac{1-\lambda}{d}\right)^2-\frac{1}{2d}\right]+\cdots$$

Ebenso ergiebt sich aus 40):

$$43)\qquad x' = d-\lambda-\frac{1-\lambda}{d}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{d}\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cdots$$

Von hier aus geht man zu rechtwinkligen Coordinaten über, indem man hat:

$$44)\qquad \begin{array}{lll} \text{auf } S\text{:} & x = \varrho\cos\alpha & \text{und auf } S'\text{:}\quad x' = x' \\ & y = \varrho\sin\alpha & \qquad\qquad\quad y' = \sin\alpha. \end{array}$$

Unter Benutzung von 39) kann man aus den Gleichungen der letzten Zeile zunächst $\sin\frac{\alpha}{2}$ in eine Potenzreihe nach y resp. y' entwickeln. Diese kann man in (42)—(44) einsetzen und erhält so x und x' nach Potenzen von y und y' entwickelt. Die Ausführung der Rechnung ergiebt:

$$45)\qquad \begin{aligned} x &= -\lambda-\left(\frac{1-\lambda}{d}-1\right)\frac{y^2}{4\lambda}+\left\{\frac{1}{4d}-\frac{1-\lambda}{2d}+2\left(\frac{1-\lambda}{2d}\right)^2\right\}\frac{y^4}{8\lambda^3}+\cdots \\ x' &= d-\lambda-\frac{1-\lambda}{4d}y'^2+\frac{\lambda}{32d}y'^4+\cdots \end{aligned}$$

Es ist selbstverständlich, dass diese beiden Entwicklungen bis zu Gliedern 4. Ordnung mit den Ausdrücken übereinstimmen, die man aus dem früheren Ansatz für die Spiegelmeridiane 3) erhält, wenn man diejenigen Werte 28) der Deformationen einführt, die sphärische Aberration und Koma zum Verschwinden bringen.

16. Um die praktische Nutzanwendung aus den vorstehenden Resultaten zu ziehen, sollen die Spiegelformen für das oben als besonders brauchbar erkannte System $\lambda = 0{,}5$, $d = 1{,}25$ nach den strengen Formeln berechnet und mit den Krümmungskugeln und den sich ihnen anschmiegenden Rotationsflächen 2. Grades verglichen werden.

Die Spiegelflächen selbst haben bei dieser Wahl der Constanten die Gleichungen:

$$\text{Spiegel } S\text{:} \quad x = -\varrho\cos\alpha, \quad y = \varrho\sin\alpha, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{4}{5}\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\cdot\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{10}}{\left(1-\frac{4}{5}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^4}$$

$$\text{Spiegel } S'\text{:} \quad x' = \frac{5}{4} - \frac{\sin^2\alpha}{5} - \frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{4}{5}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^4}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^8}, \quad y' = \sin\alpha.$$

Die Gleichungen der Meridiane der Rotationsflächen 2. Grades, welche im Scheitel eine Berührung 4. Ordnung mit den Spiegeln haben, werden nach (4):

$$\text{Spiegel } S\text{:} \quad x = +\frac{1}{16} - \frac{9}{16}\cdot\sqrt{1-\frac{16}{15}y^2} \quad \text{Ellipsoid,}$$

$$\text{Spiegel } S'\text{:} \quad x' = \frac{23}{20} - \frac{2}{5}\cdot\sqrt{1+\frac{y'^2}{2}} \quad \text{Hyperboloid.}$$

Die ersten Glieder der Reihenentwicklungen in rechtwinkligen Coordinaten lauten:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}y^2 + \frac{2}{25}y^4$$

$$x' = \frac{3}{4} - \frac{1}{10}y'^2 + \frac{1}{80}y'^4.$$

Die Gleichungen der Krümmungskugeln im Scheitel (resp. ihrer Meridiane) sind:

$$x = \frac{7}{6} - \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - y^2}, \quad x' = \sqrt{25-y'^2} - \frac{17}{4}.$$

Allgemeine Anordnung und Strahlengang in dem System ist aus Figur 9 ersichtlich. Die genauen Abmessungen erhält man aus dem folgenden Täfelchen.

Die numerischen Angaben des Täfelchens beziehen sich auf eine Brennweite des Systems von 1000 mm. Die erste Spalte giebt den Parameterwinkel α, die zweite das in Rücksicht auf den vorgesetzten kleinen Spiegel übrig bleibende wirksame Oeffnungsverhältnis $\sqrt{3}\cdot\sin\alpha$, die Spalten y und y' geben die Axenabstände der Strahlschnittpunkte mit den Spiegeln (das sind also die für das betreffende Oeffnungsverhältnis erforderlichen Spiegelradien) in Millimetern. Unter x und x' sind nicht die x-Coordinaten in dem bisher gebrauchten Sinne gegeben, sondern der Uebersicht wegen gleich die Abstände der Spiegelpunkte von den Berührungsebenen im Spiegelscheitel. Es folgen dieselben Grössen für die Krümmungskugeln und die berührenden Flächen zweiter Ordnung. Schliesslich sind die Abweichungen der Flächen von einander gebildet, wobei als Einheit das Tausendstel Millimeter gewählt ist.

$f = 1000$ mm.

Kleiner Spiegel (S).

α	Oeffnung	y	x	x(Kugel)	x(Ellipsoid)	$x - x(K)$	$x - x(e)$
		mm	mm	mm	mm		
5°	1:6,6	43,694	0,573	0,573	0,573	0 μ	0 μ
10°	1:3,3	87,755	2,315	2,312	2,315	3	0
15°	1:2,2	132,555	5,296	5,280	5,296	16	0
20°	1:1,7	178,478	9,635	9,584	9,639	51	− 4
25°	1:1,4	225,922	15,508	15,383	15,525	125	− 17
30°	1:1,2	275,304	23,160	22,895	23,217	265	− 57

Grosser Spiegel (S').

α	Oeffnung	y'	x'	x'(Kugel)	x'(Hyperboloid)	$x' - x'(K)$	$x' - x'(H)$
		mm	mm	mm	mm		
5°	1:6,6	87,156	0,759	0,761	0,759	− 1 μ	0 μ
10°	1:3,3	173,648	3,004	3,015	3,004	− 11	0
15°	1:2,2	258,819	6,641	6,702	6,643	− 61	− 2
20°	1:1,7	342,020	11,518	11,714	11,532	− 196	− 14
25°	1:1,4	422,618	17,431	17,893	17,479	− 462	− 48
30°	1:1,2	500,000	24,128	25,063	24,264	− 935	− 136

Man erkennt, dass die Spiegelflächen bis zu einem Oeffnungsverhältnis von etwa 1:3 praktisch durch Ellipsoide resp. Hyperboloide ersetzt werden können. Auch darüber hinaus bis zu einem Oeffnungsverhältnis 1:1,4 etwa bleibt die Abweichung von den Flächen 2. Grades auf wenige Hundertstel Millimeter beschränkt.

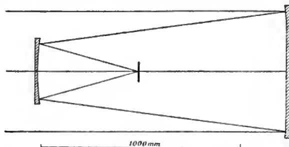


Fig. 9.

Praktisch ist der Anschluss an Flächen 2. Grades von besonderer Bedeutung, weil die Form ihrer Meridianschnitte dadurch kontrolliert werden kann,

dass man in den einen Brennpunkt eine (beim Hyperboloid virtuelle) Lichtquelle bringt und die Vereinigung des Lichtes in dem andern Brennpunkt nach der Foucault'schen Schneidenmethode prüft.

Der Anschluss der Spiegelflächen an die Krümmungskugeln ist übrigens bis zu einem Oeffnungsverhältnis 1:2,8 auch ein so enger (6μ für den kleinen, 20μ für den grossen Spiegel), dass die Herstellung dieser Flächen durch allmähliches Umschleifen ursprünglich sphärischer Spiegel jedenfalls keine grösseren Schwierigkeiten hat, als die Anfertigung eines parabolischen Spiegels von gleichem Oeffnungsverhältnis.

Als letzte Controlle der Brauchbarkeit des Spiegelsystems wurden für das Oeffnungsverhältnis 1:3,3 zwei Randstrahlen, die von einem $1^{\circ},5$ seitlich der Axe befindlichen Objectpunkt ausgingen und zur Bequemlichkeit in der Axenebene gewählt wurden, trigonometrisch durch das System hindurch verfolgt. Es ergab sich eine radiale Streuung von 18". Die Schlussfolgerungen über das brauchbare Gesichtsfeld, die am Ende des vorigen Paragraphen aus der Annäherung gezogen wurden, welche die Theorie der Fehler dritter Ordnung gewährt, entsprechen hiernach für Oeffnungsverhältnisse solcher Grössenordnung in genügender Schärfe dem Resultate einer strengen Durchrechnung.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND IV. Nro. 3.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. III.

Ueber die astrophotographischen Objektive.

Von

K. Schwarzschild.

Mit 10 Figuren im Text.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1905.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. III.

Ueber die astrophotographischen Objective.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Juli 1905.

§ 1. Einleitung.

1. Die Bedürfnisse der Himmelsphotographie zwingen den Astronomen, in vielen Fällen den Typns des gewöhnlichen zweilinsigen Fernrohrobjektivs zu verlassen und zur Verwendung verwickelterer optischer Systeme überzugehn. Dabei wird er wünschen müssen, sich von vornherein über die theoretische Leistungsfähigkeit verschiedener Typen ein Urteil zu verschaffen, um dem Optiker in der Auswahl der für den jedesmaligen Zweck geeigneten Anordnung an die Hand gehen können. Volle Aufklärung über die Leistungsfähigkeit eines Objektivs ist freilich nur auf demselben mühsamen Wege der trigonometrischen Durchrechnung zu erhalten, den der Optiker bei der Construktion seinerseits einschlägt. Doch lässt die Betrachtung der Fehler dritter Ordnung, wie sie durch die in der ersten dieser Mitteilungen [1]) abgeleiteten Seidel'schen Formeln gegeben werden, bereits die wesentlichsten Punkte hervortreten. Die folgende Untersuchung will jenem Wunsch entgegen kommen, indem sie eine kritische Beurteilung der astrophotographischen Objektivsysteme so weit durchführt, als dies auf Grund der Theorie der Fehler dritter Ordnung möglich ist.

2. Es lässt sich nun nicht in der Weise vorgehen, dass wir vorhandene Konstruktionen mit numerisch gegebenen Abmessungen auf ihre Fehler dritter

1) Untersuchungen zur geometrischen Optik I. (Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs). Astronomische Mittheilungen der königlichen Sternwarte zu Göttingen. 9. Teil und Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Math.-Physik. Klasse. Neue Folge. Bd. IV. No. 1.

Ordnung prüfen, vielmehr ist eine allgemeine Einsicht nur zu gewinnen, wenn man sich die Anfgabe stellt, selhst Systeme zu errechnen, die von Fehlern dritter Ordnung möglichst frei sind. Dahei zeigt sich ein eigentümlicher Charakter dieser Probleme. Es ist hier mit einer Ahzählung der Unbekannten nicht gethan, man kann nicht so viele Fehler dritter Ordnung zum Verschwinden bringen, als man in dem Linsensystem willkürliche Stücke zur Verfügung hat. Vielmehr können mit den vorhandenen Glassorten bestimmte Fehler für gewisse Systeme trotz genügender Zahl der willkürlichen Stücke üherhaupt nicht beseitigt werden, solange man sich wenigstens an praktisch hranchbare Anordnungen hält, nnd es ist grade die Existenz solcher nnvermeidlicher Fehlerreste, welche eine allgemeine Beurteilung der verschiedenen Objektivtypen gestattet. Die weitere Frage, wie über die übrig bleibenden Willkürlichkeiten zu verfügen ist, nachdem in Bezng anf Fehler dritter Ordnnng das Erreichbare gethan ist, könnte streng rationell nnr durch eine Theorie der Fehler 5. nnd höherer Ordnnng entschieden werden. Die praktische Optik hält sich an historisch gewordene Typen oder sondert durch trigonometrische Dnrchrechnung hesonders gute Anordnungen ans. In Ermangelung einer Theorie der Fehler 5. Ordnung wird sich der Grundsatz empfehlen, immer unter den möglichen Formen solche mit kleinen Krümmungen (grossen Krümmnngsradien) der Linsenflächen auszusuchen. Da die Fehler 5. Ordnung mit ahnehmenden Krümmungen rasch kleiner werden, so bedeutet dies eine summarische Berücksichtigung der Fehler höherer Ordnung, und man wird anf diese Weise in der That nahe auf die in Praxis verbreitetsten Objektivformen geführt. Die so znstande kommende, wenigstens halhwgs rationelle Ableitung der üblichen Ohjectivformen hildet die zweite Absicht dieser Untersuchung.

3. Herr A. König hat das Verdienst, im 7. Kapitel des von M. v. Rohr herausgegebenen Buches „Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten" (Berlin 1904), die erste nnd bisher einzige Darstellung der Errechnung von Linsensystemen auf Grund der Seidel'schen Formeln gegeben zn haben. Es lag in dem Plane des Bnches, die auf diesem Gehiete vorkommenden Aufgaben allgemein zn charakterisieren, nicht aber in speziellen Fällen die Grösse der Fehler dritter Ordnung abzuleiten. Die gegenwärtige Untersnchung hildet für die astrophotographischen Ohjektive die konkrete Ergänznng zn Herrn König's Behandlnng, indem sie für jeden Objektivtypns das Prohlem möglichst scharf definiert und his zum fertigen Rechenschema mit nnmerischer Anwendnng durchführt. Die gesonderte Behandlnng der astrophotographischen Objektive hat eine innere Berechtigung, insofern hei diesen Ohjektiven meist ein mittleres Oeffnungsverhältnis mit einem mittelgrossen Gesichtsfeld vereinigt ist (Plattengrösse einigermassen gleich Objektivgrösse) nnd die Seidel'schen Formeln grade anf solche Fälle gemünzt sind, wo man weder die Oeffnnng noch das Gesichtsfeld als sehr klein hetrachten darf. Diese Beschränkung hat noch zur praktischen Konseqnenz, dass sowohl dicke, als verkittete Linsen ausgeschlossen

werden, weil bei grösseren Dimensionen die einen zu viel Glasmaterial erfordern und zu stark absorbieren, die andern unter nachträglichen Deformationen leiden. Auch wird der Fehler der Verzeichnung öfter bei Seite gelassen, da dessen nachträgliche Bestimmung und Berücksichtigung für den Astronomen keinen erheblichen Arbeitszuwachs bedeutet.

Der freiere Ueberblick über das ganze Gebiet hat auch zur Auffindung gewisser abgeänderter oder neuer Objektivformen geführt, welche sich der näheren Erprobung durch trigonometrische Durchrechnung empfehlen.

4. Bevor auf die eigentliche Aufgabe eingegangen werden konnte, war als eine Art Nachtrag zu Mitteilung I noch die allgemeine Theorie der Farbenfehler zu behandeln, deren Berücksichtigung in Praxis noch vor den Fehlern dritter Ordnung in Betracht kommt. Die Formeln zu ihrer Berechnung sind auf eine — zuerst von Seidel abgeleitete, aber anscheinend seitdem wieder verschollene — einfache Form gebracht, die insbesondere gestattet, die Möglichkeit achromatischer Systeme aus einer Glassorte und die Grösse des sekundären Spektrums allgemein zu beurteilen.

5. Inhaltsübersicht. Die Anordnung des Stoffes wird sich daher folgendermassen gliedern: Im zweiten Paragraphen werden zunächst die Seidelschen Formeln einer Umformung unterworfen, die man als „Elimination der Blenden“ bezeichnet und die sie für die späteren Zwecke geeigneter macht. Der dritte Paragraph giebt in der „Massstabsbedingung“ eine Festsetzung formaler Art. Der vierte Paragraph enthält die Theorie der Farbenfehler, die Behandlung der Frage nach achromatischen Systemen aus einer Glassorte und des sekundären Spektrums. Mit dem fünften Paragraphen beginnt die eigentliche Arbeit, es werden hier die Fehler dritter Ordnung der einzelnen sehr dünnen Linse — des Elementes der späteren Systeme — genauer untersucht. Im sechsten Paragraphen sind die allgemeinen Formeln für die Fehler von Systemen zusammengestellt, die sich aus beliebigen sehr dünnen Linsen zusammensetzen. Die drei folgenden Paragraphen behandeln dann, zu immer verwickelteren Anordnungen aufsteigend, der Reihe nach das einfache sehr dünne System (das gewöhnliche Fernrohrobjektiv), das aus zwei getrennten dünnen Teilsystemen bestehende Objektiv (Petzvalobjektiv und Aplanat), das aus drei solchen dünnen Teilsystemen bestehende Objektiv (Taylortypus). Im 10. Paragraphen sind schliesslich die Hauptresultate zusammengestellt.

Bemerkung zu den Figuren. Bei sämtlichen in den Figuren dargestellten optischen Systemen ist der Massstab so gewählt, dass die Gesamtbrennweite gleich 100 mm wird. Das niedriger brechende Kronglas ist durch nach links ansteigende, das stärker brechende Flint durch nach rechts ansteigende Schraffierung gekennzeichnet. Das Licht ist stets von links einfallend gedacht.

6. Zusammenstellung der Bezeichnungen und der Formeln der Gauss'schen Dioptrik. Zur Bequemlichkeit des Lesers seien hier nochmals die Formeln der Gauss'schen Dioptrik im Anschluss an Mitteilung I Gl.

(55)—(58) und die Bezeichnungen zusammengestellt:

1) $$n_{i-1}\left(\frac{1}{s_i}+\frac{1}{r_i}\right) = n_i\left(\frac{1}{s_i'}+\frac{1}{r_i}\right) = K_i,\quad n_{i-1}\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{r_i}\right) = n_i\left(\frac{1}{t_i'}+\frac{1}{r_i}\right) = L_i$$

2) $$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s_i'},\quad \frac{H_{i+1}}{H_i} = \frac{t_{i+1}}{t_i'},\quad h_1 = \frac{s_1}{s_1-t_1},\quad H_1 = \frac{t_1}{n_0}$$

3) $$d_i = s_{i+1} - s_i' = t_{i+1} - t_i'$$

4) $$(L_i - K_i)\, H_i h_i = 1$$

Die Bedeutung der Zeichen ist folgende:

n_i ist der Brechungsexponent des Mediums hinter der $i$ten Fläche,

r_i ist der Krümmungsradius der $i$ten Fläche, positiv für gegen das einfallende Licht konvexe Flächen,

s_i, t_i, s_i', t_i' sind die Abstände von vier Ebenen vom Scheitel der $i$ten Fläche (positiv, wenn die betreffende Ebene im Sinne der Lichtbewegung vor dem Flächenscheitel liegt) und zwar sind diese Ebenen der Reihe nach:

Das Gauss'sche Bild der Objektebene, welches von den $i-1$ ersten brechenden Flächen entworfen wird,

das Gauss'sche Bild der Eintrittspnpille, welches von den $i-1$ ersten brechenden Flächen entworfen wird,

das Gauss'sche Bild der Objektebene, welches von den i ersten brechenden Flächen entworfen wird,

das Gauss'sche Bild der Eintrittspupille, welches von den i ersten brechenden Flächen entworfen wird.

Die Grössen h_i sind (im Sinne der Gauss'schen Dioptrik) den Axenabständen („Schnitthöhen") proportional, in welchen die einzelnen brechenden Flächen von einem Strahl getroffen werden, der von der Mitte der Objektebene ausgeht. Die Grössen H_i bedeuten dasselbe für einen von der Mitte der Eintrittspnpille ausgehenden Strahl. d_i ist der Abstand zwischen den Scheiteln der $i$ten und der $i+1$ten Fläche. K_i und L_i bezeichnen die Abbe'schen Invarianten.

Ferner bezeichnet bei nichtsphärischen Flächen b_i die Deformation der $i$ten Fläche in dem Sinne, dass $\frac{y^4 b_i}{r_i^3}$ die Abweichung der Fläche von der Kugel vom Radius r_i im Abstand y von der Axe bedeutet und positives b_i mit einer Verstärkung der Flächenkrümmung nach dem Rande zu verbunden ist.

Schliesslich sei auch die Bedeutung der 5 Fehlerkoeffizienten $B \dots F$ und der „numerischen Fehler" $B' \dots F'$ für unendlich entferntes Objekt und ein System der Brennweite f nach I. 21a) wiederholt:

$B'v^3 = -51''{,}6\, Bf^3v^3$ (Durchmesser des Zerstreuungskreises der sphärischen Aberration)

$F'v^2g = 81.1\, Ff^2v^2g$ (radiale Erstreckung der Koma)

5) $(2C'+D')vg^2 = -56.7\,(2C+D)fvg^2$ radiale; $D'vg^2 = -56.7\, Dfvg^2$ tangentiale — Axe der durch Astigmatismus und Bildwölbung erzeugten Ellipse

$E'g^3 = 29.7\, Eg^3$ (Verzeichnung)

Dabei ist g der Gesichtsfelddurchmesser mit 6° als Einheit und v das Oeffnungsverhältnis mit $f/10$ als Einheit.

Das ganze System soll fortan immer als in Luft befindlich vorausgesetzt werden (erster und letzter Brechungsindex gleich 1).

Die Krümmungsradien ϱ_t und ϱ_s des tangentialen und sagittalen Bildes sind dann gegeben durch:

5 a) $$\frac{1}{\varrho_t} = 2(2C + D), \quad \frac{1}{\varrho_s} = 2D$$

die halbe Differenz und die halbe Summe der Krümmungen:

5 b) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_t} - \frac{1}{\varrho_s}\right) = 2C, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_t} + \frac{1}{\varrho_s}\right) = 2(C + D)$$

werden als „Astigmatismus", resp. als „Bildwölbung" bezeichnet.

§ 2. Elimination der Blenden.

7. Wenn man auf Grund der Seidel'schen Ausdrücke für die Fehler dritter Ordnung eines Linsensystems die Abmessungen des Linsensystems so bestimmen will, dass diese Fehler verschwinden, so wird man zunächst dafür zu sorgen haben, dass die Fehler möglichst einfach und unmittelbar in ihrer Abhängigkeit von den geometrischen Bestimmungsstücken des Linsensystems erscheinen. Die Formeln I. (54)—(56) stellen in dieser Beziehung noch nicht das erreichbare Ideal dar. Sie verlangen, dass man zwei Strahlen nach den Sätzen der Gauss'schen Dioptrik durch das System verfolge, einen von der Mitte des Objekts ausgehenden und einen von der Mitte der Eintrittspupille ausgehenden. Es ist von Seidel gezeigt worden, dass man den zweiten, von der Blendenstellung abhängigen Strahl sparen und die Fehler des Systems noch einfach genug durch Grössen ausdrücken kann, die — bis auf eine einzige — nur von dem ersten Strahl, also von der Lage der Objektebene und ihrer durch die einzelnen Teile des Systems entworfenen Bilder, abhängen. Es ist selbstverständlich, dass eine von der Blendenstellung abhängige Grösse in den Formeln bleiben muss, da eine Verschiebung der Blenden thatsächlich auf die Fehler Einfluss hat. Diese Umformung versteht man unter „Elimination der Blenden".

Man suche zunächst die Schnitthöhe H des von der Mitte der Eintrittspupille ausgehenden Strahls durch die Schnitthöhen h des von der Objektmitte kommenden Strahls auszudrücken. Man findet aus den Gleichungen (1)—(4) elementar:

$$\frac{H_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{H_i}{h_i} = \frac{d_i}{n_i h_i h_{i+1}}$$

Führt man die Abkürzung k_i ein durch:

6) $$H_i = k_i \cdot h_i$$

so folgt:

7) $$k_{i+1} = k_1 + \sum_{i=1}^{i} \frac{d_i}{n_i h_i h_{i+1}},$$

dabei ist:

8) $$k_1 = \frac{H_1}{h_1} = \frac{t_1}{s_1}(s_1 - t_1).$$

Aus Gleichung (4) folgt ferner:

9) $$L_i = K_i + \frac{1}{h_i^2 k_i}.$$

Schliesslich leitet man aus (1) — (4) ab:

10) $$\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i} = \frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} + \frac{1}{h_i^2 k_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

Die Formeln (6)—(10) geben alle in den Seidel'schen Fehlerausdrücken vorkommenden Grössen, die ursprünglich von der Lage der Eintrittspupille abhängen, durch Stücke dargestellt, welche durch den Verlauf des durch die Objektmitte gehenden Strahls bestimmt sind. Als von der Blendenstellung abhängig bleibt allein die Grösse k_1 übrig, welche nach (8) unmittelbar aus dem Abstand t_1 der Eintrittspupille von der ersten brechenden Fläche gegeben ist. Setzt man daher diese Werte in die Seidel'schen Fehlerausdrücke ein, so erhält man die gewünschten Endformeln, die trotz ihrer anscheinenden Kompliziertheit sich in Praxis bequemer erweisen:

11) $$\begin{aligned}
2B &= \sum_i h_i^4 \cdot \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'}\right) h_i^4 K_i^2 \\
2C &= \sum_i h_i^4 k_i^2 \cdot \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'}\right)(h_i^2 k_i K_i + 1)^2 \\
2D &= \sum_i h_i^4 k_i^2 \cdot \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'}\right) h_i^2 k_i K_i (h_i^2 k_i K_i + 2) \\
&\quad + K_i \left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \\
2E &= \sum_i h_i^4 k_i^3 \cdot \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'}\right) k_i (h_i^2 k_i K_i + 1)(h_i^2 k_i K_i + 2) \\
&\quad + \frac{1 + h_i^2 k_i K_i}{h_i^2}\left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \\
2F &= \sum_i h_i^4 k_i \cdot \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'}\right) h_i^2 K_i (h_i^2 k_i K_i + 1).
\end{aligned}$$

§ 3. Die Massstabsgleichung.

8. Um unter der einfach- unendlichen Schar geometrisch ähnlicher Linsensysteme jeweils ein bestimmtes festzulegen, könnte man fordern, dass die Brennweite des Systems gleich 1 sei. Doch ist eine andere Festsetzung rechnerisch etwas bequemer. Man bezeichne mit $\varkappa$ die Ordnungsnummer der letzten brechenden Fläche und stelle die Forderung auf, die wir „Massstabsgleichung“ nennen wollen:

12) $$\frac{h_1}{s_1} - \frac{h_\varkappa}{s'_\varkappa} = 1.$$

Das hat folgende Bedeutung: Die Vergrösserung V zwischen Objektebene und Bildebene hat offenbar den Wert:

13) $$V = \frac{s'_1}{s_1} \cdot \frac{s'_2}{s_2} \cdot \cdot \cdot \frac{s'_\varkappa}{s_\varkappa} = \frac{s'_\varkappa}{s_1} \cdot \frac{h_1}{h_\varkappa}.$$

Nennt man andrerseits F den Abstand der vorderen Brennebene des Systems von der ersten brechenden Fläche, G den Abstand der ersten Hauptebene von der ersten brechenden Fläche und f die Brennweite, so ist bekanntlich nach Gauss:

$$G = F - f, \quad V = \frac{f}{F - s_1}.$$

Berücksichtigt man, dass nach (2):

$$\frac{h_1}{s_1} = \frac{1}{s_1 - t_1}$$

ist, so geht die Forderung (12) über in:

13 a) $$f = \frac{s_1 - G}{s_1 - t_1}.$$

Sie besagt daher gleichfalls, dass die Brennweite des Systems gleich 1 sein soll, erstens wenn das Objekt unendlich entfernt ist ($s_1 = \infty$) und zweitens, wenn die Eintrittspupille mit der ersten Hauptebene zusammenfällt ($G = t_1$). Da beide Umstände in Praxis meist mehr oder weniger erfüllt sind, so legt die Forderung (12) die Brennweite im allgemeinen auf einen Wert in der Nähe von 1 fest.

Der praktische Vorzug unserer Forderung beruht auf der Möglichkeit folgender Umformung. Es ist:

$$\frac{n_i h_i}{s'_i} = \frac{n_i h_{i+1}}{s_{i+1}} = \frac{n_{i+1} h_{i+1}}{s'_{i+1}} + \frac{n_{i+1} - n_i}{r_{i+1}} h_{i+1}.$$

Addiert man alle diese Gleichungen für die Werte i von 0 bis $\varkappa - 1$, so folgt:

$$\frac{h_1}{s_1} = \frac{h_\varkappa}{s'_\varkappa} + \sum_1^\varkappa \frac{n_\iota - n_{\iota-1}}{r_\iota} \cdot h_\iota,$$

oder als **zweite Form der Massstabsgleichung:**

14) $$1 = \sum_{\iota=1}^{\varkappa} \frac{n_\iota - n_{\iota-1}}{r_\iota} \cdot h_\iota.$$

§ 4. Die Farbenfehler.

9. Die Aufgabe dieses Paragraphen ist, über die aus der Dispersion des Glases entspringenden Fehler Rechenschaft zu geben. Wenn man nach den Formeln der Gauss'schen Dioptrik Lage und Grösse des durch ein Linsensystem entworfenen Bildes bestimmt, so erscheinen dieselben abhängig von dem Brechungsexponenten n der verwandten Glassorten, variieren also mit der Wellenlänge der einfallenden Strahlung. Die hierdurch erzeugten Streuungen weissen Lichts sind in Praxis von ähnlicher Grössenordnung, wie die bisher betrachteten Fehler dritter Ordnung für eine einzelne Farbe. Natürlich hängen die Fehler dritter Ordnung selbst ebenfalls von der Wellenlänge ab, doch sind ihre Variationen klein gegen ihre eigenen Beträge, dürfen daher vernachlässigt werden, solange wir uns überhaupt auf Fehler dritter Ordnung beschränken. **Daraus entnehmen wir das Recht, die Abhängigkeit von der Farbe nur in soweit in Betracht zu ziehen, als sie sich in den Formeln der Gauss'schen Dioptrik ausspricht.**

Die **erste chromatische Bedingung**, die man einem optischen System auferlegen wird, ist die der **Unabhängigkeit der Lage der Bildebene** von der Wellenlänge. Es darf sich also die Grösse $s'_\varkappa$ nicht ändern ($\varkappa$ Ordnungsnummer der letzten brechenden Fläche des Systems), wenn man zu einer andern Farbe übergeht. Nun gilt:

$$n_{\iota-1}\left(\frac{1}{s_\iota} + \frac{1}{r_\iota}\right) = n_\iota\left(\frac{1}{s'_\iota} + \frac{1}{r_\iota}\right) = K_\iota,$$

$$s_{\iota+1} - s'_\iota = d_\iota,$$

und daraus folgt durch Variation, wobei die einzelnen Variationen die mit einer bestimmten Aenderung der Wellenlänge verbundenen Aenderungen der betreffenden Grössen bezeichnen:

$$n_\iota \frac{\delta s'_\iota}{s'^2_\iota} - n_{\iota-1} \frac{\delta s_\iota}{s^2_\iota} = K_\iota\left(\frac{\delta n_\iota}{n_\iota} - \frac{\delta n_{\iota-1}}{n_{\iota-1}}\right),$$

$$\delta s_{\iota+1} = \delta s'_\iota.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit h_ι^2 und beachtet die Relation:

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s'_i},$$

so findet man:

$$15)\qquad n_i\left(\frac{h_{i+1}}{s_{i+1}}\right)^2 \delta s_{i+1} - n_{i-1}\left(\frac{h_i}{s_i}\right)^2 \delta s_i = h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)$$

und durch Addition über alle diese Gleichungen:

$$n_\varkappa\left(\frac{h_{\varkappa+1}}{s_{\varkappa+1}}\right)^2 \delta s_{\varkappa+1} = n_\varkappa\left(\frac{h_\varkappa}{s'_\varkappa}\right)^2 \delta s'_\varkappa = n_0\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 \delta s_1 + \sum_{i=1}^{\varkappa} h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right).$$

Da nun wegen der unverrückten Lage des Objektes $\delta s_1 = 0$ ist, so geht die erste chromatische Bedingung $\delta s'_\varkappa = 0$ in die Forderung über:

$$16)\qquad 0 = \sum h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right).$$

Ist dieselbe nicht erfüllt, so werde ich den Wert der Summe:

$$17)\qquad \Phi = -555\,\frac{s'_\varkappa}{h_\varkappa} \sum h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)$$

als numerischen Betrag des ersten Farbenfehlers bezeichnen. Der Faktor $555\,\frac{s'_\varkappa}{h_\varkappa}$ und das Minuszeichen ist aus einem später ersichtlichen praktischen Grunde gewählt. Der Durchmesser des entsprechenden Zerstreuungskreises ist offenbar, wenn wieder $\frac{v}{10}$ das Oeffnungsverhältnis angiebt, $\delta s'_\varkappa \frac{v}{10}$. Auf das Objekt zurückprojiziert bei der Vergrösserung V giebt dies $\delta s'_\varkappa \frac{v}{10}\,\frac{1}{V}$ und von der Eintrittspupille aus gesehn im Winkelwert in Bogensekunden:

$$\delta s'_\varkappa \frac{v}{10 \sin 1''}\,\frac{1}{V(s_1 - t_1)}.$$

Setzt man hier den Wert (13) von V ein und berücksichtigt den Wert (2) von h_1, so geht diese Grösse über in $\frac{\delta s'_\varkappa v}{10 \sin 1''}\,\frac{h_\varkappa}{s'_\varkappa}$. Demnach ist die Streuung durch den ersten Farbenfehler:

$$18)\qquad \frac{\delta s'_\varkappa v}{10 \sin 1''}\,\frac{h_\varkappa}{s'_\varkappa} = -\frac{1}{5550 \sin 1''}\,\Phi v = -37''\!.1\,\Phi v.$$

10. Als zweite chromatische Bedingung, mit deren Erfüllung dann in der Tat, soweit die Gauss'sche Dioptrik reicht, Freiheit des Bildes von Farbenfehlern gewonnen ist, muss verlangt werden, dass neben der Lage auch

die **Grösse des Bildes** von der Farbe unabhängig wird. Diese Bedingung lässt sich in übersichtlicher Form folgendermassen gewinnen.

Die Vergrösserung zwischen Bild und Objekt hat den Wert:

19)
$$V = \frac{s_1'}{s_1} \cdot \frac{s_2'}{s_2} \cdots \frac{s_\varkappa'}{s_\varkappa}.$$

Es folgt durch logarithmische Variation in Rücksicht auf (3):

$$\frac{\delta V}{V} = \sum_{\iota=1}^{\varkappa} \left(\frac{\delta s_\iota'}{s_\iota'} - \frac{\delta s_\iota}{s_\iota} \right) = \frac{\delta s_\varkappa'}{s_\varkappa'} - \frac{\delta s_1}{s_1} + \sum_{\iota=2}^{\varkappa} \delta s_\iota \left(\frac{1}{s_{\iota-1}'} - \frac{1}{s_\iota} \right).$$

Die hier auftretende Summe lässt sich so umformen:

$$\sum_{\iota=2}^{\varkappa} \delta s_\iota \left(\frac{1}{s_{\iota-1}'} - \frac{1}{s_\iota} \right) = \sum_{\iota=2}^{\varkappa} \frac{d_{\iota-1} \delta s_\iota}{s_\iota s_{\iota-1}'} = \sum_{\iota=2}^{\varkappa} \frac{d_{\iota-1}}{s_\iota^2} \frac{h_\iota}{h_{\iota-1}} \delta s_\iota.$$

Nun ist aber nach (7):

$$\frac{d_{\iota-1}}{h_{\iota-1}} = (k_\iota - k_{\iota-1}) h_\iota n_{\iota-1}$$

Demnach:

$$\sum_{\iota=2}^{\varkappa} \delta s_\iota \left(\frac{1}{s_{\iota-1}'} - \frac{1}{s_\iota} \right) = \sum_{\iota=2}^{\varkappa} h_\iota^2 n_{\iota-1} \left(\frac{k_\iota - k_{\iota-1}}{s_\iota^2} \right) \delta s_\iota,$$

oder nach den k_ι umgeordnet:

$$= -\frac{h_1^2 k_1}{s_1^2} \delta s_1 + \frac{h_{\varkappa+1}^2 k_\varkappa}{s_{\varkappa+1}^2} \delta s_{\varkappa+1} + \sum_{\iota=1}^{\varkappa} k_\iota \left[n_{\iota-1} \frac{h_\iota^2}{s_\iota^2} \delta s_\iota - n_\iota \frac{h_{\iota+1}^2}{s_{\iota+1}^2} \delta s_{\iota+1} \right],$$

also infolge von (15):

$$= -\frac{h_1^2 k_1}{s_1^2} \delta s_1 + \frac{h_\varkappa^2 k_\varkappa}{(s_\varkappa')^2} \delta s_\varkappa' - \sum_{\iota=1}^{\varkappa} h_\iota^2 k_\iota K_\iota \left(\frac{\delta n_\iota}{n_\iota} - \frac{\delta n_{\iota-1}}{n_{\iota-1}} \right).$$

Damit ergiebt sich für die Veränderung der Vergrösserung δV, wofern man noch berücksichtigt, dass $\delta s_1 = 0$ ist, unter einfacher Umformung des Gliedes ausserhalb der Summe:

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta s_\varkappa'}{s_\varkappa' - t_\varkappa'} - \sum_{\iota=1}^{\varkappa} h_\iota^2 k_\iota K_\iota \left(\frac{\delta n_\iota}{n_\iota} - \frac{\delta n_{\iota-1}}{n_{\iota-1}} \right).$$

Ist die erste chromatische Bedingung erfüllt, also $\delta s_\varkappa' = 0$, **so lautet daher die zweite chromatische Bedingung** $\delta V = 0$:

20)
$$0 = \sum_{\iota=1}^{\varkappa} h_\iota^2 k_\iota K_\iota \left(\frac{\delta n_\iota}{n_\iota} - \frac{\delta n_{\iota-1}}{n_{\iota-1}} \right).$$

Wenn das nicht der Fall ist, so werde ich allgemein die Grösse:

21) $$\Psi = -\frac{s'_{\varkappa}\,\Phi}{h_{\varkappa}(s'_{\varkappa}-t'_{\varkappa})} - 555\sum h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right),$$

als **numerischen Betrag des zweiten Farbenfehlers** bezeichnen. Da nach (18)

$$\frac{\delta s'_{\varkappa}}{s'_{\varkappa}-t'_{\varkappa}} = -\frac{s'_{\varkappa}}{h_{\varkappa}(s'_{\varkappa}-t'_{\varkappa})}\cdot\frac{\Phi}{555}$$

ist, so gilt dann:

$$555\,\frac{\partial V}{V} = \Psi.$$

Die zugehörige **Strenung durch den zweiten Farbenfehler** im Abstand $g\,.\,\mathrm{tg}\,3^0$ von der Axe wird:

22) $$\frac{\delta V}{V}\cdot g\ \mathrm{tg}\ 3^0 = 38''9\ g\Psi.$$

11. Die beiden chromatischen Bedingungen:

$$0 = \sum h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) \qquad \text{und} \qquad 0 = \sum h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)$$

lassen sich noch auf eine andre einfache, von L. Seidel (Astron. Nachrichten. Bd. 135 pag. 310 und Bd. 137 pag. 115) angegebene Form bringen. Es ist:

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s'_i} = 1+\frac{d_i}{s'_i}, \qquad \frac{h_i}{h_{i-1}} = \frac{s_i}{s'_{i-1}} = \frac{s_i}{s_i - d_{i-1}}.$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen s'_i und s_i und setzt die entstehenden Werte in K_i ein, so erhält man:

23) $$h_i K_i\left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}\right) = \frac{h_{i+1}-h_i}{d_i} - \frac{h_i - h_{i-1}}{d_{i-1}}.$$

Es bleibt diese Formel auch für $i = 0$ und $i = \varkappa$ richtig, wenn man die bisher nicht benutzten Grössen h_0, $h_{\varkappa+1}$, d_0, $d_{\varkappa}$ gemäss den Gleichungen:

24) $$h_0 = h_{\varkappa+1} = 0, \qquad d_0 = s_1,\ d_{\varkappa} = -s'_{\varkappa}$$

ansetzt.

Führt man die Abkürzung ein:

25) $$\frac{\dfrac{\delta n_i}{n_i} - \dfrac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}}{\dfrac{1}{n_i} - \dfrac{1}{n_{i-1}}} = \mu_i,$$

so wird damit

$$\sum h_i^2 K_i \left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^{\varkappa} h_i \mu_i \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{d_i} - \frac{h_i - h_{i-1}}{d_{i-1}}\right),$$

oder durch Umordnung nach den d_i:

$$= \frac{h_{\varkappa+1} - h_\varkappa}{d_\varkappa} h_\varkappa \mu_\varkappa - \frac{h_1 - h_0}{d_0} h_1 \mu_1 - \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \frac{(h_i - h_{i+1})(h_i \mu_i - h_{i+1} \mu_{i+1})}{d_i},$$

Unter Berücksichtigung von (24) lautet daher die neue Form der ersten chromatischen Bedingung:

$$0 = \frac{h_\varkappa^2}{d_\varkappa} \mu_\varkappa + \frac{h_1^2}{d_0} \mu_1 + \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \frac{(h_i - h_{i+1})\ (h_i \mu_i - h_{i+1} \mu_{i+1})}{d_i}. \tag{26}$$

Ganz entsprechend kann die zweite chromatische Bedingung auf die Form gebracht werden:

$$0 = \frac{h_\varkappa^2 k_\varkappa \mu_\varkappa}{d_\varkappa} + \frac{h_1^2 k_1 \mu_1}{d_0} + \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \frac{(h_i - h_{i+1})\ (h_i k_i \mu_i - h_{i+1} k_{i+1} \mu_{i+1})}{d_i}. \tag{27}$$

12. Eine interessante Anwendung gestattet die Gleichung (26) auf Systeme aus einer Glassorte. Wenn Luft und dieselbe Glassorte immer abwechseln, so erhalten offenbar alle μ_i denselben Wert und die erste chromatische Bedingung nimmt die Form an:

$$0 = \frac{h_1^2}{d_0} + \frac{h_\varkappa^2}{d_\varkappa} + \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \frac{(h_i - h_{i+1})^2}{d_i}.$$

Diese Gleichung kann bei vor dem Systeme liegendem Objekt (positivem $d_0 = s_1$) nur befriedigt werden, wenn $d_\varkappa = -s'_\varkappa$ negativ, $s'_\varkappa$ positiv ist, da die übrigen Abstände d ihrem Wesen nach positiv sind. Aus einer Glassorte können daher nie achromatische Objektive, die ein reelles Bild hinter dem System ($s'_\varkappa$ negativ, $d_\varkappa$ positiv) geben, sondern nur Okulare mit virtuellem Bild hergestellt werden. Ueber die einfachsten achromatischen Okulare solcher Art vgl. man C. V. L. Charlier „Ueber achromatische Linsensysteme" Öfversigt af K. SV. Vet.-Akad. Förhandl. 1898. No. 9. und 1899. No. 7.

13. Ebenso gestattet die Gleichung (26) eine einfache Uebersicht über das sogenannte sekundäre Spektrum. Bisher haben wir zwei verschiedene Wellenlängen betrachtet, denen die Brechungsexponenten n_i und $n_i + \delta n_i$ entsprachen. Wir wollen diese Wellenlängen zur Fixierung der Vorstellung festlegen auf die beiden Fraunhofer'schen Linien C und F ($\lambda = 656{,}3\,\mu\mu$ und $\lambda = 486{,}2\,\mu\mu$). Das zu betrachtende optische System vereinige die Bilder

dieser beiden Farben in derselben Ebene, es sei für sie die erste chromatische Bedingung erfüllt:

$$0 = \sum h_i^2 K_i \left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right).$$

Man betrachte nun aber weiter eine dritte Wellenlänge und zwar speziell diejenige der Fraunhofer'schen Linie G' ($\lambda = 434{,}1\ \mu\mu$) nnd nenne den zugehörigen Brechungsexponenten $n + \delta n'$. Dann bleibt für diese dritte Farbe nach (17) nnd (26) der folgende Betrag des ersten chromatischen Fehlers übrig:

$$\text{28)} \qquad \Phi' = 555 \frac{d_\varkappa}{h_\varkappa}\left[\frac{h_1^2 \mu_1'}{d_0} + \frac{h_\varkappa^2 \mu_\varkappa'}{d_\varkappa} + \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \frac{(h_i - h_{i+1})(h_i \mu_i - h_{i+1}\mu_{i+1})}{d_i}\right],$$

wobei μ_i' ans μ_i entsteht, indem man δn_i durch $\delta n_i'$ ersetzt. Diese Grösse nennt man „sekundäres Spektrum". Das seknndäre Spektrum würde mit dem ersten Farbenfehler zugleich verschwinden, wenn sich alle Brechungsindices proportional änderten, wenn:

$$\partial n_i' = \alpha \, . \, \partial n_i$$

(α eine für alle Glassorten gemeinsame Konstante) wäre. Das ist aber bei den vorhandenen Glassorten nicht der Fall, vielmehr gilt ein verwickelterer Zusammenhang.

Man hat zn unterscheiden zwischen den seit Fraunhofer bekannten „alten" Silikatgläsern und den „neuen" Jenenser Borosilikaten. Für die alten Gläser hat sich empirisch die Beziehung ergeben:

$$\text{29)} \qquad \delta n' = 1{,}674\, \delta n - 0.0018\,(n-1),$$

während die neueren Gläser einen relativ etwas langsameren Anstieg des Brechungsexponenten nach dem Violett zu haben entsprechend der Formel:

$$\text{29a)} \qquad \delta n' = 1.667\, \delta n - 0.0018\,(n-1).$$

Betrachten wir znnächst ein optisches System nnr ans alten Gläsern, so finden wir:

$$\mu' = \frac{\frac{\delta n_i'}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}'}{n_{i-1}}}{\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}} = 1{,}674 \frac{\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}}{\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}} + 0.0018,$$

$$\text{30)} \qquad \mu' = 1{,}674\, \mu + 0.0018.$$

Setzt man dies in (28) ein, so ergiebt sich — in Rücksicht auf die vorausgesetzte Erfüllung der ersten Farbenbedingung — dadurch, dass der frühere Faktor 555 grade als der reziproke Wert von 0.0018 gewählt ist:

$$\Phi' = \frac{d_\varkappa}{h_\varkappa}\left[\frac{h_1^2}{d_0} + \frac{h_\varkappa^2}{d_\varkappa} + \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \frac{(h_{i+1} - h_i)^2}{d_i}\right]. \tag{31}$$

Man sieht hieraus, dass für ein System aus alten Gläsern, welches ein reelles Bild liefert ($d_\varkappa$ positiv), das sekundäre Spektrum niemals verschwinden kann. Für den Fall eines unendlich fernen Objekts ($d_0 = \infty$, $h_1 = 1$) und ein System der Brennweite 1 $\left(\frac{d_\varkappa}{h_\varkappa} = 1\right.$ gemäss der Massstabsgleichung) findet man durch Nullsetzen der Differentialquotienten von Φ' nach $h_2 \ldots h_\varkappa$ direkt den Minimalwert von Φ':

$$\Phi' = 1 - \frac{d}{4}, \tag{32}$$

wobei d die Dicke des optischen Systems von der ersten bis zur letzten Fläche bedeutet. Da man bei astronomischen Systemen mit der Dicke d nicht über die halbe Brennweite ($d = 0{,}5$) hinausgehen wird, so folgt als Minimalwert $\Phi' = 0.9$. Demnach kann gemäss (18) die Streuung durch sekundäres Spektrum bei Objektiven aus alten Gläsern nicht unter $33''v$ herabgedrückt werden. Beim Oeffnungsverhältnis 1:5 ($v = 2$) erreicht das sekundäre Spektrum also bereits die Bogenminute.

Für ein sehr dünnes System, bei welchem alle Flächen sehr nahe in der gleichen Höhe geschnitten werden, folgt bei unendlich entferntem Objekt ($d_0 = \infty$):

33) $h_1 = h_2 = \cdots = h_\varkappa = 1$ und $\Phi' = 1$ (Streuung: $37''v$).

Dies ist also der unveränderliche Betrag des sekundären Spektrums für alle sehr dünnen Systeme aus alten Gläsern.

Ersetzen wir nun weiter eine Linse i aus altem Glas durch eine solche aus neuem vom selben Brechungsexponenten für die Fraunhofer'schen Linien C und F, so ändert sich für die Linie G' der Brechungsexponent nach (29) um $-0.007\,\delta n_i$. Daraus folgt die entsprechende Aenderung von Φ':

$$555 \cdot \frac{d_\varkappa}{h_\varkappa} \cdot 0.007\, \frac{\delta n_i}{n_i}\left[\frac{h_i}{\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}}\left(\frac{h_{i+1} - h_i}{d_i} - \frac{h_i - h_{i-1}}{d_{i-1}}\right) - \frac{h_{i+1}}{\frac{1}{n_{i+1}} - \frac{1}{n_i}}\left(\frac{h_{i+2} - h_{i+1}}{d_{i+1}} - \frac{h_{i+1} - h_i}{d_i}\right)\right].$$

Um zu einer Abschätzung der Grössenordnung dieses Ausdrucks zu gelangen, wollen wir eine Linse in Luft wählen ($n_{i-1} = n_{i+1} = 1$), die für Glas gültigen Durchschnittswerte $n_i = 1{,}5$, $\delta n_i = 0{,}01$ einführen, und unendlich entferntes Objekt bei der Brennweite 1 betrachten ($d_\varkappa = h_\varkappa$).

Dann erhält der Ausdruck den Wert:

$$0{,}08\left[h_{i+1}\left(\frac{h_{i+2}-h_{i+1}}{d_{i+1}}-\frac{h_{i+1}-h_i}{d_i}\right)+h_i\left(\frac{h_{i+1}-h_i}{d_i}-\frac{h_i-h_{i-1}}{d_{i-1}}\right)\right].$$

Damit nun dieser Zusatz, der der Einführung einer Linse aus neuem Glase entspringt, das sekundäre Spektrum der ursprünglichen Kombination aufhebt, muss er mindestens auf 0.9 (den Minimalbetrag des sekundären Spektrums für altes Glas) ansteigen. Dazu muss entweder eine der Grössen h_i oder eine der Grössen $\frac{h_{i+1}-h_i}{d_i}$ von der Grössenordnung 10 werden, wenn nicht zugleich mehrere derselben gross werden. Die Grössen h_i sind die Schnitthöhen eines von der Objektmitte ausgehenden Strahls, mit der Einfallshöhe als Einheit. Die Grössen $\frac{h_{i+1}-h_i}{d_i}$ sind, wie geometrisch sofort zu ersehen, den Neigungen desselben Strahls gegen die Axe proportional, wobei als Einheit der Winkel des aus dem Systeme austretenden Strahls mit der Axe, der das Oeffnungsverhältnis bestimmt, genommen ist. Die einen oder andern Grössen können nur dann hohe Beträge annehmen, wenn die Krümmungsradien der betreffenden Flächen klein werden. *Die Aufhebung des sekundären Spektrums erfordert also bei Verwendung neuen Glases immer noch starke Krümmungen.* Es lässt sich natürlich aus dieser rohen Abschätzung nicht erkennen, bis zu welcher numerischen Grenze die Krümmungsradien herabgehen müssen, um das sekundäre Spektrum aufzuheben. Indessen hat die Praxis gezeigt, dass in der Tat diese Grenze eine niedrige ist. Aus der Kleinheit der Krümmungsradien folgt dann, dass das betreffende System nur für ein geringes Oeffnungsverhältnis brauchbar ist. So können die verschiedentlich hergestellten 3-teiligen Fernrohrobjektive ohne sekundäres Spektrum nur bis zu einem Oeffnungsverhältnis 1:15 oder höchstens 1:12 benutzt werden; der von Herrn H. Harting[1]) angegebene Aplanat, der für das Oeffnungsverhältnis 1:10 berechnet ist, beseitigt das sekundäre Spektrum, wenigstens im photographischen Gebiet, noch nicht ganz, sondern setzt die Streuung nur etwa auf die Hälfte herunter. *Es bleibt daher die Tatsache bestehn, dass man für die astrophotographische Praxis immer mit einem sehr erheblichen Betrag des sekundären Spektrums zu rechnen hat.* So sehr dadurch die Linsensysteme gegenüber den farbenfreien Spiegelteleskopen in Nachteil versetzt werden, so folgt daraus doch für die Konstruktion der Linsensysteme die Bequemlichkeit, dass sonstige kleine Fehler durch das sekundäre Spektrum überdeckt werden und dass man für die meisten astrophotographischen Aufgaben die Vollkommenheit der Systeme für eine einzelne Farbe keineswegs bis zu der Grenze treiben muss, bei welcher die Beugung des Lichts eine Rolle zu spielen beginnt.

1) Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1899. Bd. 19. pag. 269.

Es sei hier noch besonders hervorgehohen, dass die bisher benutzten numerischen Werte der sogenannten optischen Korrektion des Chromatismus entsprechen, bei welcher grade die Bilder in den Wellenlängen der Linien C und F vereinigt werden. Würde man statt dessen eine sogenannte aktinische Korrektion vornehmen und die F-Linie mit der violetten Quecksilberlinie ($\lambda = 405{,}1\,\mu\mu$) vereinigen, so würde das sekundäre Spektrum dieselbe Grösse, wie vorhin für die G'-Linie, hier etwa für die D-Linie erreichen. Es geben daher die obigen Zahlen auch eine brauchbare Vorstellung von der Streuung durch sekundäres Spektrum für die in letzterer Weise korrigierten astrophotographischen Objektive [1]).

§ 5. Die dünne Einzellinse.

14. Wir kehren zurück zu den Seidel'schen Formeln für die Fehler dritter Ordnung, in der Gestalt (11), die sich nach Elimination der Blenden ergab, und wenden dieselbe an auf eine einzelne in Luft befindliche Linse, bei welcher die Dicke verschwindend gering ist gegen die Krümmungsradien ihrer Begrenzungsflächen. Die Begrenzungsflächen mögen in der früheren Zählweise die Indices 1 und 2 haben. Es ist dann $n_0 = n_2 = 1$ und es werde n_1 kurz durch n bezeichnet. Das Verschwinden der Linsendicke bedeutet, dass die beiden Linsenflächen von jedem Strahl im selben Axenabstand geschnitten werden. Es ist daher

$$h_1 = h_2 = h, \qquad k_1 = k_2 = k,$$

wobei h und k zur Vereinfachung eingeführt sind. Ferner folgt noch nach (3) aus dem Verschwinden der Linsendicke ($d_1 = 0$):

$$s_2 = s_1'.$$

Damit ist:

$$34) \qquad \frac{1}{s_1}+\frac{1}{r_1} = n\left(\frac{1}{s_1'}+\frac{1}{r_1'}\right) = K_1, \quad n\left(\frac{1}{s_1'}+\frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{s_2'}+\frac{1}{r_2} = K_2.$$

Wir führen nun die „Brennweite" φ und die „Durchbiegung" σ der Linse ein:

$$35) \qquad \varphi = (n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \quad \sigma = (n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

Die Durchbiegung σ verschwindet für eine symmetrische Linse. Man hat dann:

$$\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2'} = \varphi,$$

1) Vgl „Bilderzeugung in optischen Instrumenten" herausgegeben von M. v. Rohr. Berlin 1904. pag. 366.

was wir in der Form schreiben wollen:

$$36)\qquad \frac{1}{s_1} - \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{s_2'} + \frac{\varphi}{2} = R.$$

Dabei spielt R der ganzen Linse gegenüber dieselbe Rolle, wie K_1 und K_2 für die einzelnen Flächen, und soll deswegen „Abbe'sche Invariante der Linse" heissen. Von den Deformationen der Flächen b_1 und b_2 zeigt sich alsbald, dass sie bei einer dünnen Linse nur in der Kombination:

$$37)\qquad \beta = (n-1)\left(\frac{b_1}{r_1^3} - \frac{b_2}{r_2^3}\right),$$

auftreten. Diese Grösse β soll einfach als „Deformation der Linse" bezeichnet werden. Wir wollen fernerhin φ, σ und β als Bestimmungsstücke der dünnen Linse betrachten und den Abstand der Objektebene durch Angabe von R festlegen. Indem man alles durch diese Grössen auszudrücken sucht, erhält man zunächst:

$$38)\qquad K_1 = R + \frac{\sigma + n\varphi}{2(n-1)}, \qquad K_2 = R + \frac{\sigma - n\varphi}{2(n-1)},$$

und ferner:

$$39)\quad \frac{1}{s_1} - \frac{1}{ns_1'} = R \cdot \frac{n^2-1}{n^2} + \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{1}{ns_2'} - \frac{1}{s_2'} = -R \cdot \frac{n^2-1}{n^2} - \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\varphi}{2}.$$

Setzt man dies in die Seidel'schen Formeln (11) ein, so erhält man nach geringer Reduktion die folgenden Ausdrücke für die Fehler der dünnen Einzellinse:

$$40)\qquad \begin{aligned} B &= h^4 P \\ F &= h^4 k P + h^2 Q \\ C &= h^4 k^2 P + 2h^2 k Q + \frac{\varphi}{2} \\ D &= h^4 k^2 P + 2h^2 k Q + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\varphi}{2} \\ E &= h^4 k^3 P + 3h^2 k^2 Q + k \cdot \frac{3n+1}{n} \cdot \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

wobei:

$$40a)\qquad \begin{aligned} P &= \beta + \frac{n^2}{8(n-1)^2}\varphi^3 - \frac{n}{2(n+2)} R^2\varphi + \frac{\varphi}{2n(n+2)}\left[\frac{\sigma}{2}\,\frac{n+2}{n-1} + 2R(n+1)\right]^2 \\ Q &= \frac{\varphi}{2n}\left[\frac{\sigma}{2}\,\frac{n+1}{n-1} + R(2n+1)\right] \end{aligned}$$

ist. Die Bedeutung der Grössen P und Q wird sofort erhellen.

Man kann diese Fehlerausdrücke in sehr mannigfaltiger Weise umformen. Man kann zum Beispiel P durch Q ausdrücken, indem man die Durchbiegung σ mit Hülfe von Q aus P eliminiert. Es wird dann:

40b) $$P = \beta + \Pi + 2\lambda\,(Q-\varrho)^2,$$

wofern man zur Abkürzung:

40c) $$\Pi = \frac{n^2}{8(n-1)^2}\,\varphi^2 - 2(n+1)^2\,\lambda\varrho^2, \qquad \lambda = \frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2}\,\frac{1}{\varphi}, \quad \varrho = \frac{R\varphi}{2(n+2)},$$

setzt.

In manchen Fällen empfiehlt sich folgende Anordnung. Man setze:

41) $$x = \frac{2(n+1)}{n} + \frac{\sigma}{R}\,\frac{n+2}{2n(n-1)}, \quad y = \frac{\varphi}{R}\cdot\frac{n+1}{2(n-1)}, \quad z = \frac{n+1}{2n}\,\frac{1}{h^2kR}, \quad u = \frac{h^4R^2n\varphi}{2(n+2)}$$

Dann ist:

41a) $$\begin{aligned} B &= u\left\{\frac{\beta h^4}{u} + x^2 - 1 + \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}y^2\right\} \\ F &= uk\left\{\frac{\beta h^4}{u} + (x+z)^2 - \left(1-\frac{z}{n+1}\right)^2 + \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}(y^2-z^2)\right\} \\ \frac{C+D}{2} &= uk^2\left\{\frac{\beta h^4}{u} + (x+2z)^2 - \left(1-\frac{2z}{n+1}\right)^2 + \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\left(y^2+\frac{2}{n}z^2\right)\right\} \\ E &= uk^3\left\{\frac{\beta h^4}{u} + (x+3z)^2 - \left(1-\frac{3z}{n+1}\right)^2 + \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\left(y^2+\frac{3n+4}{n}z^2\right)\right\} \\ \frac{C-D}{2} &= -\frac{\varphi}{4n}. \end{aligned}$$

Es sei insbesondere hervorgehoben, dass die Durchbiegung σ der Linse nur in der Grösse x auftritt, sodass man aus dieser Form bequem erkennt, wie sich die Fehler mit der Durchbiegung ändern.

15. Wir wenden uns zur Diskussion spezieller Fälle und nehmen zunächst an, dass die Eintrittspupille mit der Linse selbst zusammenfällt ($k=0$), dass die Linse ohne Blende für sich allein benutzt wird. Dann lauten die Fehler:

42) $$\begin{aligned} B &= h^4P \\ F &= h^3Q \\ \frac{C+D}{2} &= \frac{\varphi}{4}\,\frac{2n+1}{n} \\ \frac{C-D}{2} &= -\frac{\varphi}{4}\,\frac{1}{n} \\ E &= 0. \end{aligned}$$

Es bedeuten also (bis auf den Faktor h^4 resp. h^3) P und Q die sphärische Aberration resp. Koma der Linse ohne Blende. Vom praktischen Interesse sind folgende Linsenformen:

a) Die deformierte aplanatische Linse. Man sorgt hier zunächst dafür, dass die Koma verschwindet, setzt also $Q = 0$ oder nach 40a):

$$0 = \frac{\sigma}{2} \frac{n+1}{n-1} + R(2n+1), \tag{44}$$

woraus nach (35) folgt:

$$\frac{1}{r_1} = \varphi \cdot \frac{n^2}{n^2-1} - \frac{1}{s_1} \frac{2n+1}{n+1}, \qquad \frac{1}{r_2} = \varphi \cdot \frac{n^2-n-1}{n^2-1} - \frac{1}{s_1} \frac{2n+1}{n+1}. \tag{45}$$

Für $n = 1{,}5$ und unendlich entferntes Objekt ($s_1 = \infty$) ergiebt sich speziell:

$$r_1 = {}^5/_9 \cdot \frac{1}{\varphi} \qquad r_2 = -\frac{5}{\varphi}, \tag{46}$$

sodass also die komafreie Linse für unendlich entferntes Objekt beistehende Gestalt hat. Man sieht weiter aus 40a), dass sich die sphärische Aberration B, resp. die Grösse P durch eine geeignete Deformation β zum Verschwinden bringen lässt. Solche aplanatische Einzellinsen sind neuerdings für Spektrographen im Gebrauch[1]).



Fig. 1.

b) Die Linse kleinster sphärischer Aberration. Bei einer nicht- deformierten Linse ($\beta = 0$) hat man bei gegebener Brennweite nur die Durchbiegung zur Verfügung und wird versuchen müssen, die sphärische Aberration durch geeignete Wahl derselben möglichst klein zu machen. Aus der ersten der Gleichungen (41a) erkennt man, dass dies erreicht wird, indem man x zu Null macht, also nach (41) setzt:

$$0 = 2(n+1) + \frac{\sigma}{R} \frac{n+2}{2(n-1)}. \tag{47}$$

Der übrig bleibende Betrag der sphärischen Aberration ist:

$$B = u\left\{\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} y^2 - 1\right\}. \tag{48}$$

Die sphärische Aberration kann also nur verschwinden, wenn:

$$\left|\frac{1}{y}\right| > \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1},$$

oder nach (36) und (41):

$$\left|\frac{R}{\varphi}\right| = \left|\frac{1}{s_1\varphi} - \frac{1}{2}\right| > \frac{\sqrt{n(n+2)}}{2(n-1)}$$

1) Vgl. J. Hartmann, Zeitschrift für Instrumentenkunde. Sept. 1904.

ist. Daraus folgt für positives φ:

49)
$$\frac{f}{\frac{1}{2}+\varkappa} > s_1 > -\frac{f}{\varkappa-\frac{1}{2}}$$

und für negatives φ:

49a)
$$-\frac{f}{\varkappa-\frac{1}{2}} > s_1 > +\frac{f}{\varkappa+\frac{1}{2}},$$

wobei $f = \frac{1}{\varphi}$ die Brennweite der Linse bedeutet und zur Abkürzung: $\varkappa = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{2(n-1)}$ gesetzt ist. Es ergiebt sich also für eine positive Linse vom Brechungsexponenten 1,5, dass die sphärische Aberration nur aufgehoben werden kann, wenn das Objekt zwischen $0{,}36f$ vor und $0{,}44f$ hinter der Linse liegt. In allen andern Fällen bleibt der durch (48) gegebene Restbetrag der sphärischen Aberration.

Speziell für unendlich entferntes Objekt $\left(s_1 = \infty,\ R = -\frac{\varphi}{2}\right)$ folgt aus (47) und (36) für die Linse kleinster sphärischer Aberration:

50)
$$\sigma = -\frac{2(n^2-1)}{n+2},\quad \frac{1}{r_1} = \varphi\frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)},\quad \frac{1}{r_2} = \varphi\frac{2n^2-n-4}{2(n-1)(n+2)}$$

und für $n = 1{,}5$:

51)
$$r_1 = \frac{7}{12}\frac{1}{\varphi},\quad r_2 = -\frac{7}{2}\frac{1}{\varphi},$$

also eine Linse beistehender Form.

Der Restbetrag der sphärischen Aberration selbst wird in diesem Falle:

52)
$$B = \frac{\varphi^3 n(8n-1)}{8(n-1)^2(n+2)},$$

Fig. 2.

woraus für $n = 1{,}5$ nach (5) eine Streuung von $55''.v^3$ folgt. Es würde also bei einer derartigen Linse der Zerstreuungskreis der spärischen Aberration schon beim Oeffnungsverhältnis $1:10$ $(v = 1)$ etwa 1' Durchmesser erhalten, sodass eine solche Linse einzeln nicht zu verwenden ist.

c) Die Linse kleinster Bildwölbung. Wir wollen schliesslich noch die Bildwölbung der nicht deformierten Einzellinse betrachten, indem wir jetzt aber der Linse in beliebigem durch k bestimmten Abstande eine Blende vorsetzen. Der dritten Gleichung 41a) entnimmt man, dass man für eine möglichst kleine Bildwölbung die Durchbiegung so zu wählen hat, dass:

53)
$$x + 2s = 0$$

wird. Der übrig bleibende Betrag der Bildwölbung schreibt sich in Rücksicht auf (41):

$$\frac{C+D}{2} = \frac{(n+1)^2}{8n(n+2)}\frac{\varphi}{s^2}\left\{\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\left(y^2+\frac{2}{n}s^2\right)-\left(1-\frac{2s}{n+1}\right)^2\right\},$$

was man umschreiben kann in die Form:

54) $$\frac{C+D}{2} = \frac{\varphi}{4n}\,\frac{1-\frac{n}{n+2}\varrho-\frac{2}{n+2}\left[\frac{n+1}{2}\frac{1-\varrho}{s}-1\right]^2}{1-\varrho},$$

wobei vorübergehend zur Abkürzung:

$$\varrho = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}y^2$$

gesetzt ist.

Man erkennt, dass $\frac{C+D}{2}$ zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn ϱ kleiner als 1 ist, ebenso, wenn $\varrho > 1$, aber $\frac{n}{n+2}\varrho < 1$ ist, dass hingegen für $\varrho > \frac{n+2}{n}$ ein Minimum von $\frac{C+D}{2}$ existiert, welches eintritt für:

55) $$s = \frac{n+1}{2}(1-\varrho)$$

und den Wert hat:

56) $$\frac{C+D}{2} = \frac{\varphi}{4n}\,\frac{\frac{n}{n+2}\varrho-1}{\varrho-1}.$$

Im Ganzen ergiebt sich also, dass die Bildwölbung nur zum Verschwinden gebracht werden kann für $\varrho < \frac{n+2}{n}$ oder $|y| < \frac{n+1}{n}$, woraus ähnlich, wie oben bei der sphärischen Aberration, für den Objektabstand s_1 folgt:

57) $$(2n-2)f > s_1 > -\frac{2n-2}{2n-1}f \quad \text{für positive Brennweite } f.$$
$$-\frac{(2n-2)}{2n-1}\cdot f > s_1 > +(2n-2)f \quad \text{„ negative „ „.}$$

Z.B. kann die Bildwölbung für eine positve Linse vom Brechungsexponenten 1,5 nur aufgehoben werden, wenn das Objekt zwischen der ganzen Brennweite vor und der halben Brennweite hinter der Linse liegt.

Im Falle unendlich entfernten Objekts

$$\left(s_1 = \infty,\ h = 1,\ k = t_1,\ y = -\frac{n+1}{n-1},\ R = -\frac{\varphi}{2}\right)$$

tritt das Minimum der Bildwölbung ein, wie man aus (53) und (55) in Rücksicht auf (41) ableitet, für:

58) $$\sigma = \frac{2(n+1)(3n-1)}{(n+2)}\varphi,\ t_1 = +\frac{1}{\varphi}\frac{2}{n}\frac{(n-1)^2}{4n-1}.$$

Dabei ist der zugehörige Minimalwert der Bildwölbung:

59) $$\frac{C+D}{2} = \frac{\varphi}{4n}\frac{2n-1}{4n-1}.$$

Ist $n = 1{,}5$, so ergiebt sich für die Radien der Linse und den Blendenabstand:

$$\frac{1}{r_1} = -6{,}3\,\varphi,\ \frac{1}{r_2} = -8{,}3\,\varphi,\ t_1 = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{\varphi}.$$


Fig. 3.

Das ist eine Anordnung der beigezeichneten Art. Die Streuung durch Bildwölbung wird dann $7'',5\,v^2 g$, was z. B. im Vergleich mit dem gewöhnlichen Fernrohrobjektiv (s. u. § 7) einen sehr geringen Rest an Bildwölbung bedeutet.

Eine ähnliche Anordnung zeigt der von Wollaston (1812) angegebene Meniskus, welcher früher als Landschaftslinse Verwendung fand[1]).

16. Es folge schliesslich noch eine Bemerkung über die Farbenfehler der dünnen Linse. Bildet man die in den Farbenfehlern vorkommenden Ausdrücke:

$$\sum h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) \text{ und } \sum h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)$$

für die einzelne Linse in Rücksicht auf (38), so erhält man für die beiden Summen resp. die Werte $h^2\varphi\frac{\delta n}{n-1}$ und $h^2 k\varphi\frac{\delta n}{n-1}$, woraus nach (17) und (21) die Beträge der Farbenfehler selbst abzuleiten wären. Man setzt allgemein:

60) $$\frac{\delta n}{n-1} = \frac{1}{\nu}$$

und nennt ν die reziproke relative Dispersion oder den ν-Wert betreffenden Glassorte. Für eine dritte Farbe schreibt man entsprechend:

$$\frac{\delta n'}{n-1} = \frac{1}{\nu'}.$$

1) Vgl. v. Rohr. Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs pag. 88.

§ 6. Zusammenstellung der Formeln für Systeme aus dünnen Einzellinsen.

17. Indem wir von jetzt ab ausschliesslich Systeme aus dünnen Einzellinsen behandeln, wollen wir eine neue Nummerierung nach Linsen, statt nach brechenden Flächen einführen. Die Linsen sollen die Nummer $i = 1, 2, \dots \varkappa$ erhalten. Der Brechungsindex innerhalb der i ten Linse sei n_i, die Krümmungsradien ihrer beiden Flächen seien r_i und r'_i, ihre Deformationen b_i und b'_i. Es bedeute d_i den Abstand zwischen der i ten und der $i+1$ ten Linse. Ueberhaupt sollen alle auf die i te Linse bezüglichen Grössen mit den Index i versehen werden. Die Höhen, in welchen ein Strahl die beiden Flächen einer unendlich dünnen Linse schneidet, werden gleich, so dass jeder Linse ein bestimmter Wert h_i resp. H_i der Schnitthöhe für einen von der Objektmitte resp. Pupillenmitte ausgehenden Strahl zukommt. Unter s_i, s'_i, t_i, t'_i seien nun auch die Distanzen der verschiedenen Ebenen von der i ten Linse verstanden.

Nach diesen Festsetzungen nehmen die Formeln der vorigen Nummern nach geringen Umsetzungen folgende Gestalt an:

Schema A.

I. Definitionen:

$$\varphi_i = (n_i - 1)\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r'_i}\right), \quad \sigma_i = (n_i - 1)\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r'_i}\right),$$

$$\beta_i = (n_i - 1)\left(\frac{b_i}{r_i^3} - \frac{b'_i}{r_i'^3}\right), \quad \frac{n_i - 1}{\delta n_i} = \nu_i, \quad \frac{n_i - 1}{\delta n'_i} = \nu'_i.$$

II. Gauss'sche Dioptrik:

$$\frac{1}{s_i} - \frac{\varphi_i}{2} = \frac{1}{s'_i} + \frac{\varphi_i}{2} = R_i, \quad s_{i+1} - s'_i = d_i.$$

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s'_i}, \quad h_1 = \frac{s_1}{s_1 - t_1}, \quad k_1 = t_1 \frac{(s_1 - t_1)}{s_1}, \quad k_{i+1} = k_1 + \sum_{i=1}^{i} \frac{d_i}{h_i h_{i+1}}.$$

III. Massstabsbedingung:

$$1 = \sum_1^{\varkappa} h_i \varphi_i = \frac{s_1}{h_1} - \frac{s'_\varkappa}{h_\varkappa}.$$

IV. Chromatische Bedingungen:

$$\text{a)} \quad 0 = \sum_1^{\varkappa} h_i^2 \frac{\varphi_i}{\nu_i}.$$

$$\text{b)} \quad 0 = \sum_1^{\varkappa} h_i^2 k_i \frac{\varphi_i}{\nu_i}.$$

V. Fehler dritter Ordnung:

a) $$B = \sum_i P_i h_i^4,$$

$$F = \sum_i P_i h_i^3 k_i + Q_i h_i^2,$$

$$\frac{C+D}{2} = \sum_i P_i h_i^2 k_i^2 + 2 Q_i h_i^2 k_i + \frac{2n_i+1}{n_i}\frac{\varphi_i}{4},$$

$$E = \sum_i P_i h_i k_i^3 + 3 Q_i h_i^2 k_i^2 + \frac{3n_i+1}{n_i}\frac{\varphi_i}{2} k_i,$$

$$\frac{C-D}{2} = -\sum_i \frac{\varphi_i}{4 n_i}.$$

b) $$P_i = \beta_i + \Pi_i + 2\lambda_i (Q_i - \varrho_i)^2.$$

c) $$Q_i = \frac{\varphi_i}{2 n_i}\left[\frac{\sigma_i}{2}\frac{n_i+1}{n_i-1} + R_i(2n_i+1)\right].$$

d) $$\Pi_i = \frac{n_i^2}{8(n_i-1)^2}\varphi_i^3 - 2(n_i+1)^2 \lambda_i \varrho_i^2, \quad \lambda_i = \frac{n_i(n_i+2)}{(n_i+1)^2}\frac{1}{\varphi_i}, \quad \varrho_i = \frac{R_i \varphi_i}{2(n_i+2)}.$$

VI. Secundäres Spectrum:

a) $$\Phi' = -555 \frac{s'_\varkappa}{h_\varkappa} \sum_1^\varkappa \frac{h_i^2 \varphi_i}{\nu'_i}.$$

Speziell für Systeme aus alten Gläsern und unendlich entferntes Objekt:

b) $$\Phi' = \sum_1^\varkappa h_i^2 \varphi_i.$$

§ 7. Das dünne zweiteilige Objektiv (das gewöhnliche Fernrohrobjektiv).

18. Als erste Anwendung betrachten wir ein aus zwei dünnen in Kontakt befindlichen Linsen zusammengesetztes System ($d_1 = 0$). Die Eintrittspupille falle mit der Linse zusammen ($t_1 = 0$) und das Objekt sei unendlich weit entfernt ($s_1 = \infty$). Es sind dies die Verhältnisse, wie sie dem üblichen Fernrohrobjektiv entsprechen.

Man erhält sofort:

$$h_1 = h_2 = 1, \quad k_1 = k_2 = 0$$

und hat daher die Massstabsbedingung:

61) $$1 = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Von den chromatischen Bedingungen wird die zweite von selbst erfüllt, die

erste giebt:

$$0 = \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}. \tag{62}$$

Die Fehler 3. Ordnung werden:

$$\begin{aligned} B &= \Pi_1 + \Pi_2 + 2\lambda_1 (Q_1 - \varrho_1)^2 + 2\lambda_2 (Q_2 - \varrho_2)^2 + \beta_1 + \beta_2, \\ F &= Q_1 + Q_2, \\ \frac{C+D}{2} &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2}\right), \\ E &= 0, \\ \frac{C-D}{2} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2}\right). \end{aligned} \tag{63}$$

Wir wenden uns zur Diskussion dieser Formeln. Nachdem die Gesamtbrennweite durch die Massstabsbedingung zur Einheit gewählt ist, legt die Achromatisierung des Bildorts (62) die Brennweiten der Einzellinsen fest zu:

$$\varphi_1 = \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}. \tag{64}$$

Verzeichnung ist nicht vorhanden. Hingegen erhalten die Bildkrümmungen die Werte:

$$\begin{aligned} 2(2C + D) &= \frac{1}{\varrho_t} = 3 + \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_2 - \nu_1}\left(\frac{1}{n_1 \nu_1} - \frac{1}{n_2 \nu_2}\right), \\ 2D &= \frac{1}{\varrho_s} = 1 + \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_2 - \nu_1}\left(\frac{1}{n_1 \nu_1} - \frac{1}{n_2 \nu_2}\right), \end{aligned}$$

welche man auch schreiben kann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_t} &= 3 + \frac{1}{n_1} - \varphi_2\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right) \\ \frac{1}{\varrho_s} &= 1 + \frac{1}{n_1} - \varphi_2\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right). \end{aligned} \tag{65}$$

Da sich die Brechungsexponenten der verwendbaren Gläser nur wenig unterscheiden $\left(\left|\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right| < 0{,}1\right)$ und man φ_2 nicht zu gross wählen darf, um keine zu kurze Brennweite und zu starke Krümmungen für die zweite Linse zu erfordern, so bleibt das letzte Glied dieser Ausdrücke immer klein und das Fernrohrobjektiv hat in Praxis die unveränderlichen Bildkrümmungen (n_1 etwa gleich 1,5)[1]):

1) Näheres über den Einfluss der Glassorte s. H. Harting. Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1899. Bd 19. pag 138

66) $$\frac{1}{\varrho_1} = 3{,}7, \quad \frac{1}{\varrho_2} = 1{,}7.$$

Es sollen die Linsenflächen zunächst als sphärisch (nicht deformiert) vorausgesetzt werden. Dann sind nach Festlegung der Brennweiten die Durchbiegungen der beiden Linsen noch willkürlich. Man wird sie benutzen, um das Objektiv von sphärischer Aberration und Koma zu befreien. Die Bedingung $F = 0$ liefert:

67) $$Q_2 = -Q_1$$

und dies in die Bedingungen $B = 0$ eingesetzt giebt nach kurzer Reduktion die quadratische Gleichung für Q_1:

68) $$0 = \alpha Q_1^2 + \beta Q_1 + \gamma,$$

wobei gilt:

68a) $$\alpha = \frac{n_1(n_1+2)}{\varphi_1(n_1+1)^2} + \frac{n_2(n_2+2)}{\varphi_2(n_2+1)^2}, \quad \beta = \frac{n_2 R_2}{(n_2+1)^2} - \frac{n_1 R_1}{(n_1+1)^2},$$
$$\gamma = \frac{1}{16}\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)^2 \varphi_2^2 - \frac{\varphi_1}{4}\left(\frac{n_1 R_1}{n_1+1}\right)^2 - \frac{\varphi_2}{4}\left(\frac{n_2 R_2}{n_2+1}\right)^2.$$

Die Abbe'schen Invarianten ergeben sich, nachdem durch (64) die Brennweiten bestimmt sind, aus der Gauss'schen Dioptrik zu:

69) $$R_1 = -\frac{\varphi_1}{2}, \quad R_2 = -\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2},$$

sodass die drei Koeffizienten α, β, γ ohne weiteres zu berechnen sind.

Hat man dann aus (68) und (67) Q_1 und Q_2 gefunden, so erhält man aus den Gleichungen V(c) des Schemas (A) zunächst die Durchbiegungen σ und dann aus den Gleichungen I die Krümmungsradien. Es finden sich die Formeln:

70) $$\left.\begin{matrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_1'} \end{matrix}\right\} = \frac{2Q_1}{\varphi_1}\frac{n}{n_1+1} - R_1\frac{2n_1+1}{n_1+1} \pm \frac{\varphi_1}{2(n_1-1)}$$
$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2'} \end{matrix}\right\} = -\frac{2Q_1}{\varphi_2}\frac{n_2}{n_2+1} - R_2\frac{2n_2+1}{n_2+1} \pm \frac{\varphi_2}{2(n_2-1)}.$$

Dieses Formelsystem ist dem Sinne nach zuerst von C. Moser (Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1887 pag. 308) aufgestellt und von Herrn H. Harting (ebenda 1904, pag. 79) auf eine besonders rechenflüchtige, mit der hier erhaltenen nahe übereinstimmende, Form gebracht worden. Man sieht, dass durch eine ver-

hältnismässig sehr kurze Rechnung, wobei man die Gleichungen in der Reihenfolge (64), (69), (68a), (68), (70) benutzt, die Krümmungsradien zu finden sind.

Für die numerischen Werte $n_1 = 1{,}5$, $n_2 = 1{,}6$, $\nu_1 = 60$, $\nu_2 = 36$, wie sie dem gewöhnlichen Kron- resp. Flintglas schematisch entsprechen, ergiebt die Durchrechnung der Formeln, indem man diejenige Lösung der quadratischen Gleichung für Q_1 wählt, welche die grösseren Krümmungsradien liefert:

$$71)\qquad \frac{1}{r_1} = +1{,}674,\quad \frac{1}{r_1'} = -3{,}326,\quad \frac{1}{r_2} = -3{,}255,\quad \frac{1}{r_2'} = -0{,}755.$$

Der hierdurch bestimmte beigezeichnete Linsentypus entspricht im Wesentlichen der seit Fraunhofer üblichen Form der Fernrohrobjektive.



Fig. 4.

Das Fernrohrobjektiv hat also (neben dem sekundären Spektrum) als einzige übrig bleibende Fehler Bildkrümmung und Astigmatismus. Aus den oben unter (66) gegebenen Werten der Krümmungen findet man nach (5) die Streuungen:

$$72)\qquad \begin{aligned} &104'' g^2 v \text{ in radialer Richtung} \\ &47'' g^2 v \text{ in tangentialer Richtung.} \end{aligned}$$

Demnach ist das Fernrohrobjektiv bei einem Oeffnungsverhältnis 1:10 ($v = 1$) nie weiter als für ein Gesichtsfeld von höchstens 3° Durchmesser ($g = 1/2$) brauchbar, wobei am Rande die Sterne als Ellipsen von den Axen 26" resp. 12" gezeichnet werden. In der That sind diese Streuungen bereits das äusserste zulässige, da sie sich schon sehr deutlich neben dem sekundären Spektrum bemerklich machen und, wie die Erfahrung bei den auf diese Art gebauten Normalrefraktoren für die photographische Himmelskarte gezeigt hat, zu einem Verlust von etwa einer halben Grössenklasse bei den schwächsten Sternen führen.

Der numerische Betrag Φ' des sekundären Spektrums ist übrigens nach (33), wie für jedes dünne Linsensystem aus alten Gläsern, gleich 1 und die daraus hervorgehende Streuung gleich $37''.v$.

19. Was würde man durch Einführung deformierter Flächen bei dem Fernrohrobjektiv erreichen können? In Bezug auf Fehler dritter Ordnung könnte offenbar keine Verbesserung erzielt werden, da der einzige Fehler, in welchen die Deformationen nach (63) überhaupt eingehn, die sphärische Aberration, auch ohne dieselben bereits beseitigt ist.

Man kann indessen die Deformationen so wählen, dass man ein Objektiv mit möglichst geringen Krümmungen erhält, was für den Fall sehr grossen Oeffnungsverhältnisses in Bezug auf Fehler höherer Ordnung von Nutzen sein kann.

Man hat zu diesem Zweck die erste Linse, welche die grössere Brennweite besitzt, symmetrisch (ohne Durchbiegung) zu wählen ($r_1 = -r_1'$), also nach der

ersten Formel (70):

$$73)\qquad 0 = \frac{2Q_1}{\varphi_1}\frac{n_1}{n_1+1} - R_1\frac{2n_1+1}{n_1+1}, \quad \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{r_1'} = \frac{\varphi_1}{2(n_1-1)}$$

zu setzen. Um das Objektiv von Koma frei zu machen, ist die Bedingung $Q_2 = -Q_1$ beizubehalten. Es ergiebt sich dann aus der zweiten Gleichung (70) für die Radien der zweiten Fläche:

$$74)\qquad \begin{matrix}\frac{1}{r_2}\\ \frac{1}{r_2'}\end{matrix} = -R_1\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\cdot\frac{2n_1+1}{n_1}\frac{n_2}{n_2+1} - R_2\frac{2n_2+1}{n_2+1} \pm \frac{\varphi_2}{2(n_2-1)}.$$

Nunmehr hat man noch die Deformationen so zu bestimmen, dass die sphärische Aberration verschwindet, dass $B = 0$ wird. Es genügt hierfür, eine, z. B. die erste Fläche zu deformieren, und zwar erhält man nach (63) und nach der Definition von β als Betrag der Deformation:

$$75)\qquad b_1 = -\frac{r_1^3}{n_1-1}\left[\Pi_1 + \Pi_2 + 2\lambda_1(Q_1-\varrho_1)^2 + 2\lambda_2(Q_2+\varrho_2)^2\right].$$

Nachdem die Radien aus (73) und (74) bestimmt sind, lässt sich dieser Ausdruck ohne weiteres berechnen.

Für die obigen numerischen Verhältnisse finden sich die Krümmungsradien:

$$76)\qquad \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{r_1'} = 2{,}500,\ \frac{1}{r_2} = -1{,}842,\ \frac{1}{r_2'} = +0{,}658,$$

sodass namentlich die Flintglaslinse ausserordentlich flach wird.

§ 6. Objective aus zwei dünnen Teilsystemen.

20. Wir gehen weiter zur Behandlung von Linsensystemen, welche dem Typus der am meisten verbreiteten photographischen Objective entsprechen, welche nämlich aus zwei in einem grösseren Abstand befindlichen dünnen Teilsystemen bestehen. Jedes Teilsystem besteht aus mehreren dünnen Einzellinsen. Bei Universalobjektiven hat man bis zu drei Linsen für das Teilsystem verwendet, von denen dann aber jedes Mal mindestens zwei verkittet sind. Bei astronomischen Objektiven, bei denen das Verkitten, wie erwähnt, unthunlich ist, geht man nicht über die Zweizahl der Linsen des Teilsystems, im ganzen also über die Verwendungen von 4 Linsen hinaus.

21. Allgemeines über die Petzvalbedingung. Man wird durch die Vermehrung der Linsenzahl und die Einführung eines endlichen Abstands zwischen den Linsen gegenüber dem gewöhnlichen Fernrohrobjektiv vor allem eine Ver-

minderung der Bildwölbung und des Astigmatismus zu erreichen suchen. Dabei nimmt die Petzvalbedingung eine besondere Stellung ein. Dieselbe lautet für ein beliebiges Linsensystem:

$$0 = \sum \frac{\varphi_\iota}{n_\iota}$$

oder:

$$0 = \frac{1}{n} \sum \varphi_\iota + \sum \varphi_\iota \left(\frac{1}{n_\iota} - \frac{1}{n} \right),$$

wobei n einen Durchschnittswert des Brechungsexponenten der verwandten Glassorten bedeuten soll. Auf der andern Seite lautet die Massstabsbedingung:

$$1 = \sum h_\iota \varphi_\iota = \sum \varphi_\iota + \sum (h_\iota - 1) \varphi_\iota .$$

Aus beiden Bedingungen zusammen folgt:

$$1 = \sum \varphi_\iota \left(h_\iota - \frac{n}{n_\iota} \right).$$

Nun ist einerseits $\frac{n}{n_\iota}$ stets nahe 1. Auf der andern Seite sind die Höhen h_ι, in denen der Strahl die einzelnen Linsen schneidet, nicht viel von der Einfallshöhe 1 verschieden, solange das ganze Objektiv dünn ist gegen die Gesamtbrennweite, und zugleich die Brennweiten der Teilsysteme nicht gar zu kurz im Verhältnis zur Gesamtbrennweite sind. Letztere beiden Bedingungen werden aber in Praxis erfüllt sein, weil man zu starke Krümmungen und damit kurze Brennweiten der Einzellinsen wegen der Fehler höherer Ordnung vermeiden muss und weil bei einem im Verhältnis zur Brennweite langen Objektiv das Gesichtsfeld beschränkt ist. So folgt in Praxis im Allgemeinen, dass sowohl h_ι, als $\frac{n}{n_\iota}$ nahe bei 1 liegen, dass ihre Differenz also klein ist, dass zugleich die reziproken Brennweiten φ_ι klein sind, und dass daher der Wert der ganzen obigen Summe nicht auf 1 zu bringen ist. Es stösst also die Erfüllung der Petzvalbedingung auf Schwierigkeiten, wenn man nicht von der Forderung geringer Krümmung der Flächen abgehn will.

Freilich wird sich unten zeigen, dass — im Gegensatz zu den Verhältnissen beim sekundären Spektrum — die erforderlichen Krümmungen nicht allzu grosse werden, aber man wird unter diesen Umständen doch zunächst fragen, wie weit man etwa ohne Erfüllung der Petzvalbedingung in der Vervollkomnung eines Linsensystems gelangen kann. Der Ausdruck der Krümmungsradien der Bildflächen 5 b) lässt sich schreiben:

$$\frac{1}{\varrho_t} = 6C - 2(C - D), \quad \frac{1}{\varrho_s} = 2C - 2(C - D).$$

Die zugehörigen Streuungen sind nach (5):

$$56'',6[-3C+(C-D)]g^2v \text{ und } 56'',6[-C+(C-D)]g^2v.$$

Man bringt die Krümmungen und Streuungen auf ihren kleinsten absoluten Betrag, indem man die Krümmungsradien entgegengesetzt gleich macht, mit andern Worten, indem man die Bildwölbung beseitigt und nur den Astigmatismus bestehn lässt. Es folgt dann:

$$C+D = 0,$$

77) $$\frac{1}{\varrho_i} = -\frac{1}{\varrho_s} = (C-D)$$

und die Streuungen werden:

$$\pm 56'',6\frac{(C-D)}{2}g^2v.$$

Auf der andern Seite giebt das Petzval'sche Theorem für ein System aus dünnen Einzellinsen:

77 a) $$C-D = -\frac{1}{2}\sum\frac{\varphi_i}{n_i} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sum\varphi_i}{n}+\sum\varphi_i\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n}\right)\right].$$

Solange die obigen beiden Bedingungen nicht zu kleiner Brennweiten und nahe gleicher Schnitthöhen (h_i nahe 1) der Einzellinsen erfüllt sind, dürfen wir die letzte dieser beiden Summen vernachlässigen und $\sum\varphi_i$ auf Grund der Massstabsbedingung gleich der Gesamtbrennweite 1 setzen. Dann folgt für $n = 1{,}5$:

77 b) $$C-D = -\frac{1}{3}$$

und die Streuungen werden:

$$\mp 9'',4g^2v.$$

Die Sterne werden also beim Oeffnungsverhältnis $1:10 (v = 1)$ in einem Abstand von 3° von der Axe ($g = 1$) Kreise von nur 9″ Durchmesser. Damit können wir aber den Sinn der Petzvalbedingung positiv wenden durch folgende Aussage: **Ist ein Linsensystem mit mässigen Abständen und nicht zu kleinen Brennweiten der Einzellinsen von Bildwölbung befreit, so ist damit auch von selbst der Astigmatismus auf einen ziemlich geringen Betrag reduziert, und zwar so weit, dass beim Oeffnungsverhältnis 1:10 resp. 1:5 ein Gesichtsfeld von etwa 8° resp. 6° Durchmesser astronomisch brauchbar bleibt.** Als Grenze der Brauchbarkeit ist hier, den Erfahrungen beim gewöhnlichen Fernrohrobjektiv entsprechend, ein Durchmesser des Streuungskreises von 15—20″ angesetzt.

Daher empfiehlt es sich in der Tat in Praxis, zunächst zu versuchen, ob man nicht ohne Erfüllung der Petzvalbedingung die gewünschte Leistung erzielen kann, indem man nur die Bildwölbung $C+D$ zu null macht, und erst in zweiter Linie die Befriedigung der Petzvalbedingung selbst in Betracht zu ziehn.

22. Wenn wir daher jetzt daran gehn, ein Objektiv aus zwei getrennten dünnen Teilen, deren jeder wieder aus zwei Linsen besteht, zusammenzusetzen, so haben wir bei sphärischen Flächen die 8 Krümmungsradien r_i, r_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$ und den Abstand d (zur Bequemlichkeit ohne Index) der beiden Teilsysteme zur Verfügung. Die zu erfüllenden Bedingungen sind jedenfalls die Massstabsbedingung, die beiden chromatischen Bedingungen, die Beseitigung der sphärischen Aberration, der Coma und der Bildwölbung. Es wird sich empfehlen, die Dicke des Linsensystems d von vornherein festzulegen. Dann haben wir hiermit 6 Gleichungen für 8 Unbekannte.

Wir können also noch die Petzvalbedingung und ausserdem eine an sich willkürliche Bedingung hinzufügen, welche die Linsenkrümmungen so klein macht, als es bei Erfüllung der Petzvalbedingung noch möglich ist, oder aber wir lassen die Petzvalbedingung bei Seite, um zwei an sich willkürliche Bedingungen hinzuzufügen, die zu geringen Krümmungen der Linsenflächen führen. Beides soll im folgenden durchgeführt werden.

Wir vereinfachen die Bezeichnung. Jedem dünnen System kommt ein einheitlicher Wert der Grössen h und k zu. Derselbe soll für das vordere Teilsystem ohne Index belassen, für das hintere mit einem Querstrich versehn werden. Ebenso soll die Gesamtbrennweite der Teilsysteme mit ψ resp. $\bar{\psi}$ bezeichnet werden, so dass also:

78) $$\varphi_1+\varphi_2 = \psi, \qquad \varphi_3+\varphi_4 = \bar{\psi}$$

ist.

Nach diesen Festsetzungen lauten die Massstabsgleichung und die chromatischen Bedingungen:

79) $$1 = h\psi+\bar{h}\bar{\psi}',$$

80) $$0 = h^2\left(\frac{\varphi_1}{\nu_1}+\frac{\varphi_2}{\nu_2}\right)+\bar{h}^2\left(\frac{\varphi_3}{\nu_3}+\frac{\varphi_4}{\nu_4}\right), \qquad 0 = h^2k\left(\frac{\varphi_1}{\nu_1}+\frac{\varphi_2}{\nu_2}\right)+\bar{h}^2\bar{k}\left(\frac{\varphi_3}{\nu_3}+\frac{\varphi_4}{\nu_4}\right).$$

Die Gauss'sche Dioptrik liefert für unendlich entferntes Objekt:

$$s_2' = -\frac{1}{\psi}, \qquad \frac{\bar{h}}{h} = \frac{s_3}{s_2'}, \qquad s_3-s_2' = d,$$

und damit:

81) $$h = 1, \qquad \bar{h} = 1-\psi d.$$

Wir betrachten zunächst diese Bedingungen für sich. Aus den beiden chromatischen Bedingungen folgt:

82) $$0 = \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} = \frac{\varphi_3}{\nu_3} + \frac{\varphi_4}{\nu_4}.$$

In Worten: Jedes Teilsystem mnss für sich achromatisiert sein. Setzt man znr Abkürzung:

83) $$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \mu, \qquad \frac{\nu_3}{\nu_4} = \bar{\mu},$$

so folgt:

84) $$\varphi_1 = \frac{\psi}{1-\mu}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\mu\psi}{1-\mu}, \qquad \varphi_3 = -\frac{\bar{\mu}\bar{\psi}}{1-\bar{\mu}}, \qquad \varphi_4 = \frac{\bar{\psi}}{1-\bar{\mu}}.$$

Es würden also die Brennweiten der Einzellinsen bestimmt sein, sobald die Brennweiten ψ und $\bar{\psi}$ der Teilsysteme bekannt wären. Für letztere hat man zunächst die Massstabsgleichung:

85) $$1 = \psi + (1 - d\psi)\bar{\psi}.$$

Wollen wir weiter die Petzvalhedingnng;

86) $$0 = \sum \frac{\varphi_i}{n_i}$$

erfüllen, so erhält man darin eine zweite Gleichung für ψ und $\bar{\psi}$. Setzt man nämlich hier die Werte der Einzelbrennweiten aus (84) ein und benntzt die Abkürzungen:

87) $$\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{\mu}{n_2}\right) = \varkappa, \qquad \frac{1}{1-\bar{\mu}}\left(\frac{1}{n_4} - \frac{\bar{\mu}}{n_3}\right) = \bar{\varkappa},$$

so nimmt sie die Gestalt an:

88) $$0 = \psi\varkappa + \bar{\psi}\bar{\varkappa}.$$

Die Auflösung von (85) und (88) nach ψ und $\bar{\psi}$ ergiebt:

89) $$2d\psi\varkappa = -2d\bar{\psi}\bar{\varkappa} = \varkappa - \bar{\varkappa} \pm \sqrt{(\varkappa - \bar{\varkappa})^2 + 4d\varkappa\bar{\varkappa}}.$$

Oder aber wir snchen zn kleinen Krümmnngen der Einzelflächen zn kommen. Zu diesem Zweck wird es sich empfehlen, die Gesamtbrennweite 1 durch gleichmässige Verteilung auf die Einzelsysteme zustande zu bringen, also in (85) zu halbieren und:

90) $$\psi = \tfrac{1}{2}, \qquad (1 - d\psi)\bar{\psi} = \tfrac{1}{2}, \qquad \bar{\psi} = \frac{1}{2-d}$$

zu setzen.

In beiden Fällen sind durch Verbindung von (89) resp. (90) mit (84) die Brennweiten der Einzellinsen bestimmt.

Zur Erfüllung der weiteren Bedingungen bleiben die **Durchbiegungen** der vier Linsen übrig. Die Blende, deren Stellung bei der beabsichtigten Korrektion des Linsensystems nach dem in der ersten Mitteilung No. 11 abgeleiteten Satze ohne Einfluss auf die in Betracht kommenden Fehler bleibt, möge zur Vereinfachung der Rechnung mit dem zweiten Teilsystem zusammengelegt werden. Es ist dann $k_2 = k_4 = 0$. Aus (z) folgt:

$$k_1 = k_3, \qquad k_3 = k_2 + \frac{d}{h\bar{h}},$$

und damit:

$$k_1 = k_3 = -\frac{d}{1 - d\psi}, \tag{91}$$

wofür zur Vereinfachung k geschrieben werden soll.

Bei dieser besonderen Lage der Blende nehmen die Fehlerausdrücke für sphärische Aberration, Koma und Bildwölbung (pag. 26) die Form an:

$$\begin{aligned} B &= P + \bar{P}\bar{h}^4, \\ F &= Q + \bar{Q}\bar{h}^2 + kP, \\ \frac{C+D}{2} &= Pk^2 + 2Qk + \tfrac{1}{4}[\psi(2+\varkappa) + \bar{\psi}(2+\bar{\varkappa})], \end{aligned} \tag{92}$$

wobei zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2, \quad \bar{P} = P_3 + P_4, \\ Q &= Q_1 + Q_2, \quad \bar{Q} = Q_3 + Q_4, \end{aligned} \tag{93}$$

gesetzt ist und die Gleichungen (84) benutzt sind.

Unbekannt sind in den 3 Fehlerausdrücken die vier Grössen $P, \bar{P}, Q, \bar{Q}$, die ihrerseits von den vier Durchbiegungen abhängen. Es ist also möglich, hier die **zweite willkürliche Bedingung**, die uns noch freisteht, einzufügen. Als solche wollen wir eine Forderung einführen, die sich zunächst durch Einfachheit des Ansatzes empfiehlt. **Wir wollen nämlich das erste Teilsystem für sich allein von sphärischer Aberration frei machen**, $P = 0$ **setzen**. Dann lauten die vier zu erfüllenden Gleichungen:

$$P = B = F = \frac{C+D}{2} = 0,$$

und daraus folgt:

$$P = \bar{P} = 0, \qquad Q = -\bar{Q}\bar{h}^2 = -\frac{1}{8k}[2(\psi + \bar{\psi}) + \psi\varkappa + \bar{\psi}\bar{\varkappa}]. \tag{94}$$

Es erübrigt, nachdem nun die Grössen $P, \bar{P}, Q, \bar{Q}$, die Fehler der Teil-

systeme bekannt sind, daraus die Fehler der Einzellinsen, die Durchbiegungen und die Radien selbst zu rechnen.

Da die Brennweiten der Einzellinsen schon oben bestimmt wurden, so kann man ohne weiteres die Abbe'schen Invarianten R_i, sowie die Grössen Π_i, λ_i, ρ_i berechnen. Sind dieselben abgeleitet, so hat man für das erste Teilsystem gemäss Schema A. V (pag. 26) die beiden Gleichungen:

$$P = \Pi_1 + \Pi_2 + 2\lambda_1(Q_1 - \rho_1)^2 + 2\lambda_2(Q_2 - \rho_2)^2,$$

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Führt man hier: $y = Q_1 - Q_2$ als neue Unbekannte ein, so erhält man:

$$2Q_1 = Q + y, \qquad 2Q_2 = Q - y,$$

und findet durch Einsetzen dieser Werte in den Ausdruck P eine quadratische Gleichung für y. Hat man daraus y und damit auch Q_1 und Q_2 gefunden, so erhält man die Radien der beiden vorderen Linsen durch dieselben Formeln (70), wie oben beim einfachen Fernrohrobjektiv. Eine völlig analoge Rechnung ist für das zweite Teilsystem durchzuführen. Bei der Einfachheit dieser Ableitungen genüge die Zusammenstellung der Endformeln in folgendem

Schema B.

I. $$\mu = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad \bar\mu = \frac{\nu_3}{\nu_4}, \quad \varkappa = \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{\mu}{n_2}\right), \quad \bar\varkappa = \frac{1}{1-\bar\mu}\left(\frac{1}{n_4} - \frac{\bar\mu}{n_3}\right),$$

a) Erfüllung der Petzvalbedingung:

$$2d\psi\varkappa = -2d\bar\psi\bar\varkappa = \varkappa - \bar\varkappa + \sqrt{(\varkappa - \bar\varkappa)^2 + 4d\varkappa\bar\varkappa},$$

b) gleiche Verteilung der Leistung:

$$\psi = \tfrac{1}{2}, \qquad \bar\psi = \frac{1}{2-d}.$$

II. $$\varphi_1 = \frac{\psi}{1-\mu}, \quad \varphi_2 = -\frac{\mu\psi}{1-\mu}, \quad \varphi_3 = -\frac{\bar\mu\bar\psi}{1-\bar\mu}, \quad \varphi_4 = \frac{\bar\psi}{1-\bar\mu}.$$

III. $$\frac{Q}{1-\psi d} = -\bar Q(1-\psi d) = \frac{2(\psi+\bar\psi) + \psi\varkappa + \bar\psi\bar\varkappa}{8d}, \quad P = \bar P = 0.$$

VI. $$R_1 = -\frac{\varphi_1}{2}, \quad R_2 = R_1 - \frac{\psi}{2}, \quad R_3 = -\frac{\varphi_3}{2} - \frac{\psi}{1-d\psi}, \quad R_4 = R_3 - \frac{\bar\psi}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{n_i(n_i+2)}{(n_i+1)^2\varphi_i}, \quad \chi_i = \frac{n_i R_i}{(n_i+1^2} \\ \tau_i &= \tfrac{1}{8}\left(\frac{n_i^2}{n_i-1}\right)^2\varphi_i^3 - \tfrac{1}{8}\varphi_i\chi_i^2(n_i+1)^2 \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3, 4.$$

$$\text{V.}\qquad A = \chi_1 - \chi_2 - Q(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad \bar{A} = \chi_3 - \chi_4 - \bar{Q}(\lambda_3 - \lambda_4),$$

$$B = 2(\lambda_1+\lambda_2)[P + Q(\chi_1+\chi_2) - \tau_1 - \tau_2] - Q^2(\lambda_1+\lambda_2)^2, \qquad \bar{B} = 2(\lambda_3+\lambda_4)[\bar{P} + \bar{Q}(\chi_3+\chi_4) - \tau_3 - \tau_4] - \bar{Q}^2(\lambda_3+\lambda_4)^2$$

$$y(\lambda_1 + \lambda_2) = A + \sqrt{A^2 + B}, \qquad \bar{y}(\lambda_3 + \lambda_4) = \bar{A} \pm \sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}},$$

$$2Q_1 = Q + y, \qquad 2Q_3 = \bar{Q} + \bar{y},$$

$$2Q_2 = Q - y, \qquad 2Q_4 = \bar{Q} - \bar{y}.$$

$$\text{VI.}\qquad \left.\begin{array}{c} \frac{1}{r_i} \\ \\ \frac{1}{r_i'} \end{array}\right\} = \frac{2Q_i}{\varphi_i}\,\frac{n_i}{n_i+1} - R_i\,\frac{2n_i+1}{n_i+1} \pm \frac{\varphi_i}{2(n_i-1)}.$$

In Rücksicht auf eine spätere Anwendung sind in V. beliebige Werte P und $\bar{P}$ beibehalten, statt gleich die hier gültigen speziellen Werte $P = \bar{P} = 0$ einzuführen.

23. Der Petzvaltypus. Für die folgenden numerischen Beispiele habe ich die beiden äusseren Linsen des Systems als aus Kron-, die beiden inneren als aus Flintglas bestehend vorausgesetzt und dem entsprechend die schematischen Werte $n_1 = n_4 = 1{,}5$, $n_2 = n_3 = 1{,}6$, $\nu_1 = \nu_4 = 60$, $\nu_2 = \nu_3 = 36$ gewählt. Der Abstand der beiden Teilsysteme von einander betrage 0,4 der Brennweite.

Rechnet man zunächst nach dem vorigen Schema unter Benutzung von Ib) ein Objektiv mit gleicher Verteilung der Leistung auf beide Hälften, so findet man die reziproken Radien: (Brennweite = 1):

		1.	2.	3.	4. Linse.
95)	$\frac{1}{r}$	+ 2,032	− 0,845	+ 1,286	+ 2,453
	$\frac{1}{r'}$	− 0,468	+ 0,405	+ 2,848	− 0,671.

Dieses Objektiv, welches sich durch geringe Krümmung aller Flächen auszeichnet, entspricht im wesentlichen dem sogenannten Petzvaltypus. In der Tat zeigt das erste berühmte von Petzval errechnete Portraitobjektiv, wie aus den Abmessungen desselben zu entnehmen ist[1]), nahe die hier vorausgesetzte Anordnung der Fehler dritter Ordnung. Es ist für das erste Teilsystem allein die sphärische Aberration fast völlig beseitigt ($P = 0$) und es sind für das ganze System sphärische Aberration, Koma

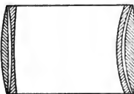


Fig. 5.

1) Vgl. v. Rohr, Theorie und Geschichte des photographischen Objectivs 1899, pag. 250.

und Bildwölbung aufgehoben. Nur hat Petzval die Leistung nicht gleichmässig auf beide Hälften verteilt, sondern die vordere Hälfte etwas stärker beansprucht, indem er ihr etwa $^2/_3$ der ganzen Brennweite gab. Dabei fand sich für die von ihm benutzten Gläser $r_1' = r_2$, sodass die beiden ersten Linsen verkittet werden konnten.

Der einzige Fehler dritter Ordnung (abgesehn von der Verzeichnung), welcher diesen Objektiven vom Petzvaltypus noch anhaftet, ist ein gewisser Astigmatismus. Für das obige Objektiv findet man den Fehler gegen die Petzvalbedingung: $\sum \frac{\varphi_i}{n_i} = 0{,}83$ und die entsprechende Streuung durch Astigmatismus gemäss (77) und (77a): $12''.g^2 v$. Genau derselbe Betrag gilt auch für das ursprüngliche Petzvalobjectiv. Es ist daher für den Petzvaltypus das brauchbare Gesichtsfeld beim Oeffnungsverhältnis 1 : 10 resp. 1 : 5 auf einen Durchmesser von etwa 7°, resp. 5° beschränkt.

Der numerische Betrag des sekundären Spektrum wird $\Phi' = 0.90$, so klein, als überhaupt möglich.

Geht man nun über zu dem System mit Erfüllung der Petzvalbedingung, so findet man aus dem Rechenschema unter Benutzung von Ia):

$$96)\quad \begin{array}{ccccc} \frac{1}{r} & +2{,}645 & -5{,}147 & +3{,}406 & -0.787 \\ \frac{1}{r'} & -5{,}261 & -1{,}193 & -0{,}548 & +7{,}119. \end{array}$$



Fig. 6.

Hier wird also eine so starke Krümmung besonders der letzten Fläche erfordert, dass das System nicht als allgemein brauchbar gelten kann. Es liegt also hier einer der Fälle vor, wie sie in No. 21 vorausgesehen wurden, wo die Erfüllung der Petzvalbedingung an den allzu grossen erforderlichen Krümmungen scheitert.

24. Modificierter Petzvaltypus. Bei den eben behandelten Systemen war die willkürliche Bedingung eingeführt, dass die sphärischen Aberrationen der Teilsysteme P und $\bar{P}$ für sich verschwinden sollten. Ausser der Uebersichtlichkeit für die Errechnung des Systems empfahl sich dieser Vorgang den Optikern noch deshalb, weil bei einem solchen System das erste Teilsystem für sich ein einigermassen brauchbares (von Koma nicht freies) Objektiv grösserer Brennweite, ein sogenanntes Landschaftsobjektiv, bildet. Da beide Gründe für die astrophysikalische Verwendung keine Rolle spielen, so wird man fragen, ob man nicht durch Aufgeben dieser willkürlichen

Bedingung $P = \overline{P} = 0$ ein System finden kann, welches bei zulässigen Krümmungen die Petzvalbedingung erfüllt.

Die Brennweiten, wie die Grössen R_i, λ_i, ϱ_i, Π_i würden hier dieselben Werte behalten, wie für das eben berechnete System, und nach Ia), II und IV des Schemas (B), sowie Va) des Schema's (A) (pag. 26) zu berechnen sein. Um die schlimmste Krümmung an der letzten Fläche zu beseitigen, habe ich nun die letzte Linse von vorne herein symmetrisch gewählt, $r_4 = -r'_4$ gesetzt. Dann folgt aus der letzten Gleichung VI des Schema's (B):

$$0 = \frac{2Q_4}{\varphi_4} n_4 - R_4(2n_4 + 1).$$

Hiermit war Q_4 gegeben und es fand sich daraus gemäß Schema A. Vb):

$$P_4 = \Pi_4 + 2\lambda_4(Q_4 - \varrho_4)^2.$$

Aus den Gleichungen (92) folgt andrerseits durch einfache Umstellung als Bedingung des Verschwindens von sphärischer Aberration, Koma und Bildwölbung des ganzen Systems:

$$97)\quad \begin{aligned} P &= -\overline{P}\cdot\overline{h}^4, \\ Q &= -\overline{Q}\,\overline{h}^3 + k\overline{h}^4\overline{P}, \\ \overline{P}\,\overline{h}^4k^2 - 2\overline{Q}\,\overline{h}^3 k &+ \tfrac{1}{4}[\psi(2+\varkappa) + \psi'(2+\varkappa')] = 0. \end{aligned}$$

Da: $\overline{P} = P_3 + P_4 = \Pi_3 + P_4 + 2\lambda_3(Q_3 - \varrho_3)^2$ und $\overline{Q} = Q_3 + Q_4$ ist, P_4 und Q_4 aber bereits bekannt sind, so bildet die letzte der vorstehenden Relationen eine quadratische Gleichung für Q_3. Ist daraus Q_3 gefunden, so hat man auch unmittelbar P_3, sowie $\overline{P}$ und $\overline{Q}$. Die beiden ersten der Gleichungen (97) führen zu P und Q und mit der Kenntnis von P, Q, $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ ist man so weit, dass man durch Anwendung von V. und VI. des Schemas (B) die Radien finden kann. Die Ausführung der Rechnung ergab:

98)		1.	2.	3.	4.
	$\frac{1}{r}$	+ 3,554	− 4,223	+ 2,650	− 3,953
	$\frac{1}{r'}$	− 4,352	− 0,270	− 1,303	+ 3,953



Fig. 7.

Man sieht, dass die maximalen Krümmungen im Vergleich zu dem System Fig. 6 erheblich heruntergegangen sind.

Es ist demnach hier eine Anordnung gewonnen, welche mit erträglichen Krümmungen Freiheit des Bildes von allen Fehlern dritter Ordnung (abgesehen von der Verzeichnung) erzielt. In Fällen, wo

man das Gesichtsfeld über die beim ursprünglichen Petzvaltypus mögliche Ausdehnung hinaus zu vergrössern wünscht, wird dieselbe den Vorzug verdienen. Ueber ihre allgemeine Brauchbarkeit liesse sich erst durch trigonometrische Durchrechnung oder Untersuchung der Fehler 5. Ordnung entscheiden.

Der numerische Betrag des sekundären Spektrums wird hier gleich 1,37.

25. D e r T y p u s d e s A p l a n a t e n. Während wir bisher die äusseren Linsen aus Kron, die inneren aus Flint gewählt hatten, wollen wir nun noch einmal nach einem System mit gleicher Verteilung der Leistung fragen, bei welchem die Glassorten vertauscht sind, die äusseren Linsen aus Flint, die inneren aus Kron bestehn. Rechnet man daher mit den Werten $n_1 = n_4 = 1{,}6$, $n_2 = n_3 = 1{,}5$, $\nu_1 = \nu_4 = 36$, $\nu_2 = \nu_3 = 60$ das Schema *B*) unter Benutzung der Formel I b) durch, so erhält man eine Lösung mit folgenden Radien:

		1. Linse	2.	3.	4.
99)	$\frac{1}{r}$	+4,048	+4,876	−0,834	−4,373
	$\frac{1}{r'}$	+5,298	+2,376	−3,960	−2,811



Fig. 8.

Es entspricht diese Form dem von A. Steinheil im Jahre 1875 angegebenen Portraitaplanaten[1]). Auch bei diesem ist das erste Teilsystem für sich von sphärischer Aberration befreit, wie man aus seinen Abmessungen entnehmen kann. Es sind dort indessen die Glassorten und der Abstand der Teilsysteme so gewählt, dass die Innenradien gleich wurden ($r_1' = r_2$ und $r_3' = r_4$) und die Linsen beider Teilsysteme verkittet werden konnten.

Da die Brennweiten der Einzellinsen hier dieselben sind, wie beim Petzvaltypus, so h a t d e r A p l a n a t a u c h g e n a u d e n s e l b e n R e s t v o n A s t i g m a t i s m u s u n d d i e s e l b e G r e n z e d e s b r a u c h b a r e n G e s i c h t s f e l d s, w i e e i n O b j e k t i v v o m P e t z v a l t y p u s. Ebenso hat das sekundäre Spektrum denselben kleinen numerischen Betrag 0,90.

§ 9. Objektive aus drei getrennten Linsen.

26. Während man bei Objektiven aus zwei getrennten dünnen Teilen im Ganzen mindestens vier Linsen braucht, da man jedes Teilsystem nach der Bemerkung pag. 34 für sich achromatisieren muss, kann man mit 3 Linsen auskommen, wenn man sie alle drei von einander um endliche Abstände d_1 und d_2 trennt. Solche Systeme wollen wir in diesem Paragraphen behandeln. Indem wir uns etwa

1) v. Rohr. Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs, pag. 302.

einen Abstand oder auch die Gesamtdicke des Systems $d = d_1 + d_2$ gegeben denken, haben wir 6 Radien und den andern Abstand zur Verfügung. Als notwendig zu erfüllende Forderungen kommen die Massstabsbedingung, die beiden chromatischen Bedingungen, die Bedingung für Verschwinden von sphär. Aberration, Koma und Bildwölbung in Betracht. Als siebente und letzte Bedingung wählen wir zuvörderst die Petzvalbedingung und späterhin eine Bedingung, die auf kleinere Krümmungen führt. Die Diskussion verläuft in der Weise, dass durch die Massstabsbedingung, die beiden chromatischen Bedingungen und die Petzvalbedingung oder ihren Ersatz, zunächst die Brennweiten und Abstände festgelegt werden, während die drei Durchbiegungen dann zur Beseitigung von sphär. Aberration, Koma und Bildwölbung verwandt werden.

27. Die Massstabsbedingung lautet:

100) $$1 = \varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 + \varphi_3 h_3.$$

Die erste chromatische Bedingung heisst:

101) $$0 = \frac{\varphi_1 h_1^2}{\nu_1} + \frac{\varphi_2 h_2^2}{\nu_2} + \frac{\varphi_3 h_3^2}{\nu_3}.$$

Legt man den für die schliesslichen Bildfehler gleichgültigen Blendenort mit der mittleren Linse zusammen, so lautet die zweite chromatische Bedingung:

102) $$0 = \frac{\varphi_1 h_1^2}{\nu_1} \cdot k_1 + \frac{\varphi_3 h_3^2}{\nu_3} \cdot k_3.$$

Die Petzvalbedingung verlangt:

103) $$0 = \frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2} + \frac{\varphi_3}{n_3}.$$

Aus der Gauss'schen Dioptrik folgt für unendlich entferntes Objekt:

104) $$h_1 = 1,\ h_2 = 1 - d_1 \varphi_1,\quad h_3 = (1 - d_1 \varphi_1)(1 - d_2 \varphi_2) - d_2 \varphi_1,$$
$$k_1 = -\frac{d_1}{h_2},\quad k_3 = +\frac{d_2}{h_2 h_3}.$$

Führt man diese Werte in den drei vorigen Formeln ein und vereinfacht sich die ohnehin etwas verwickelte Aufgabe, indem man die erste und die dritte Linse als aus demselben Glase bestehend annimmt, also:

$$n_1 = n_3,\quad \nu_1 = \nu_3$$

setzt, so gehen die vier Gleichungen (100—103) in die folgenden über:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 d_1 &= \varphi_3 d_2 (1 - d_2), \\
1 &= \varphi_1 \frac{d_1 + d_2}{d_2} + \varphi_2 (1 - \varphi_1 d_1), \\
0 &= \varphi_1 \nu (d_1 + d_2 - d_1 d_2) + \varphi_2 d_2 (1 - \varphi_1 d_1)^2, \\
0 &= m(\varphi_1 + \varphi_3) + \varphi_2.
\end{aligned} \tag{105}
$$

Hierbei sind die Abkürznngen eingeführt:

$$
\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\nu_3}{\nu_2} = \mu, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_3}{n_2} = m. \tag{106}
$$

Es empfiehlt sich, den zweiten Abstand d_2 von vorneherein als Parameter zu geben nnd aus diesen vier Gleichungen die vier Unbekannten d_1, φ_1, φ_2, φ_3 zu bestimmen. Setzt man:

$$
y = \frac{1}{1 - d_2}, \; z = \frac{d_1}{d_2}, \; d_2 = \frac{y-1}{y}, \; d_1 = z \cdot \frac{y-1}{y}, \tag{107}
$$

sodass y den Parameter vertritt nnd z an Stelle von d_1 nnter die Unbekannten zn nehmen ist, so kann man znnächst durch elementare Rechnung die drei Brennweiten ans den Gleichungen (105) eliminieren und behält dann die quadratische Gleichnng für z als Funktion von y:

$$
\frac{m}{\mu} \left(\frac{1+\mu}{1+m} \right)^2 (1 + yz) \left(1 + \frac{z}{y} \right) = \left[1 + z \cdot \frac{1 + my}{1 + m} \right]^2 \tag{108}
$$

Hat man hieraus z und damit die Abstände d_1 und d_2 gefunden, so findet man die Brennweiten ans den Gleichnngen, die sich während des Eliminationsprozesses bereits gebildet haben:

$$
\begin{aligned}
1 - \varphi_1 d_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{m} \frac{1 + \frac{z}{y}}{1 + zy}} = \frac{\mu + 1}{m + 1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{z}{y} \right)}{1 + z \cdot \frac{1 + my}{1 + m}}, \\
\varphi_2 &= -m(1 + yz)\varphi_1, \quad \varphi_3 = yz \cdot \varphi_1.
\end{aligned} \tag{109}
$$

Hiermit ist der erste Teil des Problems erledigt.

28. Es ist jetzt noch die allgemeine Anfgabe zn lösen, die Durchbiegnngen dreier Linsen, deren Abstände nnd Brennweiten gegeben sind, so zn bestimmen, dass spärische Aberration, Koma nnd Bildwölbung beseitigt werden. Diese drei Bedingnngen lauten nach Schema A. V. bei der oben gewählten Lage der Blende ($k_2 = 0$):

$$
\begin{aligned}
0 = \quad B \quad &= P_1 + P_2 h_2^4 + P_3 h_3^4, \\
0 = \quad F \quad &= P_1 k_1 + Q_1 + P_3 h_3^4 k + Q_2 h_2^2 + Q_3 h_3^2, \\
0 = \frac{C + D}{2} &= P_1 k_1^2 + 2Q_1 k_1 + P_3 h_3^4 k_3^2 + 2Q_3 h_3^2 k_3 + \frac{S}{2},
\end{aligned} \tag{110}
$$

wobei zur Abkürzung:

110a) $$S = \sum \frac{2n_i+1}{n_i} \cdot \frac{\varphi_i}{2}$$

gesetzt ist.

Statt von den drei Gleichungen (109) selbst, geht man besser von den folgenden drei Kombinationen derselben aus:

110b)
$$0 = k_1 k_3 B - (k_1 + k_3) F + \frac{C+D}{2}$$
$$= (Q_1 - Q_3 h_3^2)(k_1 - k_3) - Q_3 h_3^2 (k_1 + k_3) + P_3 h_3^4 k_1 k_3 + \tfrac{1}{2} S$$
$$0 = k_3^2 . B - 2k_3 F + \frac{C+D}{2}$$
$$= 2Q_1 (k_1 - k_3) + P_1 (k_3 - k_1)^2 - 2Q_3 h_3^2 k_3 + P_3 h_3^4 k_3^2 + \tfrac{1}{2} S$$
$$0 = k_1^2 . B - 2k_1 F + \frac{C+D}{2}$$
$$= 2Q_2 h_2^2 (k_3 - k_1) + P_2 h_2^4 (k_1 - k_3)^2 - 2Q_3 h_3^2 k_1 + P_3 h_3^4 k_1^2 + \tfrac{1}{2} S$$

Zwischen P_i nnd Q_i besteht die Beziehung:

$$P_i = \Pi_i + 2\lambda_i (Q_i - \varrho_i)^2,$$

wobei die Grössen Π_i, λ_i, ϱ_i sämtlich mit der Kenntnis der Abstände und Brennweiten des Systems gegeben und von den Durchbiegungen unabhängig sind. Setzt man diese Werte P_i ein, so erhält man drei in den Unbekannten Q_i quadratische Gleichungen, sodass für eine der Grössen Q_i durch Elimination der beiden andern eine Gleichung 8. Grades resultieren würde. Die Aufgabe ist, die Gleichungen für die Unbekannten Q_i auf eine möglichst bequeme Form zu bringen.

Da:

$$\Pi_i = \frac{n_i^2}{8(n_i - 1)^2} \varphi_i^2 - 2\lambda_i (n_i + 1)^2 \varrho_i^2$$

ist, so gilt:

$$P_i = \frac{n_i^2}{8(n_i - 1)^2} \varphi_i^2 + 2\lambda_i (Q_i - \varrho_i)^2 - 2\lambda_i (n_i + 1)^2 \varrho_i^2$$

wobei zu beachten ist, dass das letzte Glied aus dem vorletzten entsteht, indem man $Q_i - \varrho_i$ durch $(n_i + 1)\varrho_i$ ersetzt. Setzt man diesen Wert von P_i in die Gleichnngen (110b) ein, so kann man dieselben durch einfache Umstellung auf die Form bringen:

111)
$$2k_1 k_3 h_3^4 \lambda_3 (Q_3 - \varrho_3)^2 - (k_1 + k_3) h_3^2 (Q_3 - \varrho_3) - (Q_1 - \varrho_1)(k_3 - k_1) - (Q_2 - \varrho_2) h_2^2 (k_1 - k_3) = \Pi_2 - J_2$$
$$2k_3^2 h_3^4 \lambda_3 (Q_3 - \varrho_3)^2 - 2k_3 h_3^2 (Q_3 - \varrho_3) + 2(k_3 - k_1)^2 \lambda_1 (Q_1 - \varrho_1)^2 - 2(Q_1 - \varrho_1)(k_3 - k_1) = \Pi_1 - J_1$$
$$2k_1^2 h_3^4 \lambda_3 (Q_3 - \varrho_3)^2 - 2k_1 h_3^2 (Q_3 - \varrho_3) + 2(k_1 - k_3)^2 \lambda_2 (Q_2 - \varrho_2)^2 - 2(Q_2 - \varrho_2)(k_1 - k_3) = \Pi_3 - J_3$$

Dabei sind die Grössen H gleich den Werten, welche die linken Seiten der Gleichungen annehmen, wenn man in ihnen $Q_i - \varrho_i$ durch $(n_i + 1)\varrho_i$ ersetzt, und die Grössen J haben die Werte:

112)
$$J_2 = \frac{S}{2} + k_1 k_2 h_2^4 \frac{n_2^2}{8(n_2-1)^2} \varphi_2^2 - (k_1 + k_2) h_2^2 (n_2 + 2)\varrho_2$$
$$+ (n_1 + 2)\varrho_1 (k_1 - k_2) + (n_2 + 2)\varrho_2 h_2^2 (k_2 - k_1),$$
$$J_1 = \frac{S}{2} + k_3^2 h_3^4 \frac{n_3^2}{8(n_3-1)^2} \varphi_3^2 - 2k_3 h_3^2 (n_3 + 2)\varrho_3$$
$$+ (k_3 - k_1)^2 \cdot \frac{n_1^2}{8(n_1-1)^2} \varphi_1^2 + 2(k_1 - k_3)(n_1 + 2)\varrho_1,$$
$$J_3 = \frac{S}{2} + k_1^2 h_2^4 \frac{n_2^2}{8(n_2-1)^2} \varphi_2^2 - 2k_1 h_2^2 (n_2 + 2)\varrho_2$$
$$+ (k_3 - k_1)^2 h_3^4 \frac{n_3^2}{8(n_3-1)^2} \varphi_3^2 + 2(k_3 - k_1)(n_3 + 2)\varrho_3.$$

Um in den drei Gleichungen (111) die in den Q_i linearen Terme zum Teil zu beseitigen und die Faktoren, mit denen sie multipliziert sind, auf eine einfachere Gestalt zu bringen, führe man an Stelle der Q_i die neuen Unbekannten η_i ein durch:

113)
$$\eta_1 = a\left\{\frac{1}{2\lambda_1 (k_3 - k_1)} - (Q_1 - \varrho_1)\right\},$$
$$\eta_2 = a\left\{\frac{1}{2\lambda_2} \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} - h_2^2 (Q_2 - \varrho_2)\right\}, \qquad a = 4\lambda_3 \frac{k_1 k_3}{k_3 - k_1},$$
$$\eta_3 = a\left\{\frac{1}{2\lambda_3} \frac{1}{(k_1 - k_3)} - h_3^2 (Q_3 - \varrho_3)\right\}.$$

Um eine analoge Vereinfachung in den Ausdrücken H herbeizuführen, bilde man zugleich die folgenden Grössen b_i, welche aus den η_i entstehen, indem man $Q_i - \varrho_i$ durch $(n_i + 1)\varrho_i$ ersetzt:

113a)
$$b_1 = a\left\{\frac{1}{2\lambda_1 (k_3 - k_1)} - (n_1 + 1)\varrho_1\right\},$$
$$b_2 = a\left\{\frac{1}{2\lambda_2} \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} - (n + 1)\varrho_2 h_2^2\right\},$$
$$b_3 = a\left\{\frac{1}{2\lambda_3} \frac{1}{k_1 - k_3} - (n_3 + 1)\varrho_3 h_3^2\right\}.$$

Damit nehmen die Gleichungen (111) die einfache Form an:

$$\eta_2^2 + 2(\eta_1 - \eta_3) = b_2^2 + 2(b_1 - b_3) - \frac{a^2}{2\lambda_2 k_1 k_3} J_2 = K_2,$$

114)
$$\eta_1^2 + a_1(\eta_2 - 1)^2 = b_1^2 + a_1(b_2 - 1)^2 - \frac{a^2 a_1}{2\lambda_2 k_3^2} J_1 = K_1,$$

$$\eta_3^2 + a_3(\eta_2 + 1)^2 = b_3^2 + a_3(b_2 + 1)^2 - \frac{a^2 a_3}{2\lambda_2 k_1^2} J_3 = K_3,$$

wobei noch die Abkürzungen:

115)
$$a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{k_3}{k_3 - k_1}\right)^2, \quad a_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{k_1}{k_3 - k_1}\right)^2$$

eingeführt sind und die Grössen K_i die aus bereits bekannten Grössen unmittelbar zu berechnenden rechten Seiten der Gleichungen bedeuten.

Aus den drei Gleichungen (114) sind nun aber die drei Unbekannten η_i ohne Schwierigkeit zu berechnen. Eliminiert man η_1 und η_3, so findet man für η_2 die Gleichung:

116)
$$\eta_2^2 - K_2 + 2\sqrt{K_1 - a_1(\eta_2 - 1)^2} - 2\sqrt{K_3 - a_3(\eta_2 + 1)^2} = 0.$$

Das würde auspotenziert die gesuchte Eliminationsgleichung 8. Grades für η_2 ergeben. In Praxis wird man sich lieber genäherte Wurzeln, von denen aus man durch Newton'sche Annäherung weitergehen kann, durch folgendes graphische Verfahren verschaffen: Indem man η_2 als horizontale Abscisse, η_1 und η_3 vertikal als Ordinaten aufträgt, zeichnet man zunächst die beiden Parabeln mit horizontaler Axe:

$$\eta_1 = 2\sqrt{K_1 - a_1(\eta_2 - 1)^2} \qquad \eta_3 = 2\sqrt{K_3 - a_3(\eta_2 + 1)^2}$$

dann subtrahiert man graphisch die Ordinaten und erhält so eine Kurve 4. Ordnung mit der Ordinate:

$$\zeta = \eta_1 - \eta_3.$$

Ferner zeichnet man die Parabel mit vertikaler Axe:

$$\zeta' = K_2 - \eta_2^2.$$

Die Schnittpunkte der Kurve 4. Ordnung ζ mit dieser letzten Parabel ζ' liefern die reellen Wurzeln der Gleichung.

Sind auf diese Weise die Grössen η_i gefunden, so geben die Gleichungen (113) rückwärts angewandt die Grössen Q_i. Aus den Grössen Q_i ergeben sich unmittelbar die Radien der Linsen nach den Formeln VI. des Schemas B.

In dem nachfolgenden Rechenschema sind die gesamten Formeln in der Reihenfolge, in der sie zu benutzen sind, zusammengestellt. Von den Abkürzungen,

die dabei noch eingeführt sind, wird nur die folgende einer Erläuterung bedürfen. Man kann die Berechnung der Grössen J vereinfachen, indem man zunächst die Grössen:

$$c_2 = +\frac{S}{k_3-k_1} - \frac{k_1 k_3}{k_1-k_3} h_2^4 \frac{n_2^2}{4(n_1-1)^2} \varphi_2^2$$

$$+2(n_2+2)\frac{k_1+k_3}{k_3-k_1} h_2^2 \varrho_2 - 2(n_1+2)\varrho_1 + (n_3+2)\varrho_3 h_3^2,$$

117)
$$c_1 = -\frac{S}{k_3} + k_1 \frac{(k_3-k_1)}{k_3} \frac{n_1^2}{4(n_1-1)} \varphi_1^2$$

$$+2(n_1+2)\frac{k_3-k_1}{k_3} \varrho_1 - 2(n_2+2)\varrho_2 h_2^2 + 2(n_3+2)\varrho_3 h_3^2,$$

$$c_3 = \frac{S}{k_1} + k_3 \frac{(k_3-k_1)}{k_1} \frac{n_3^2}{4(n_3-1)^2} \varphi_3^2$$

$$+2(n_3+2)\frac{k_3-k_1}{k_1} h_3^2 \varrho_3 - 2(n_2+2)\varrho_2 h_2^2 + 2(n_1+2)\varrho_1$$

bildet. Es wird dann nämlich:

118) $$J_2 = \frac{k_3-k_1}{2}\cdot c_2, \quad J_1 = \frac{k_3}{k_1}\frac{(k_3-k_1)}{2}(c_1+c_2), \quad J_3 = \frac{k_1}{k_3}\frac{k_3-k_1}{2}(c_3+c_2).$$

29. Schema C. (Der Index i durchläuft cyklisch die Werte 1, 2, 3)

1.
$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1 - d_1\varphi_2, \quad h_3 = h_2(1-d_2\varphi_2) - d_2\varphi_1$$

$$k_1 = -\frac{d_1}{h_2}, \quad k_2 = 0, \qquad k_3 = +\frac{d_2}{h_2 h_3}$$

$$R_1 = -\frac{\varphi_1}{2}, \quad R_2 = -\frac{\varphi_1}{h_2} - \frac{\varphi_2}{2}, \quad R_3 = -\frac{1}{h_3} + \frac{\varphi_3}{2}$$

$$\lambda_i = \frac{n_i(n_i+2)}{(n_i+1)^2\varphi_i}, \quad \gamma_i = \frac{h_i^2\varphi_i}{2}$$

$$\vartheta_i = -\gamma_i R_i, \quad s_i = k_{i-1} - k_{i+1}, \quad S = \sum_{i=1}^{3} \frac{2n_i+1}{2n_i}\cdot\varphi_i$$

2.
$$a_2 = 4\lambda_2 \cdot \frac{s_1 s_3}{s_2}, \quad a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2, \quad a_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{s_3}{s_2}\right)^2$$

$$\beta_1 = \frac{n_1+1}{n_1+2}\cdot\vartheta_1 - \frac{1}{2\lambda_1 s_3}$$

$$\beta_2 = \frac{n_2+1}{n_2+2}\cdot\vartheta_2 - \frac{1}{4\lambda_2}\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_3}\right)$$

$$\beta_3 = \frac{n_3+1}{n_3+2}\cdot\vartheta_3 + \frac{1}{2\lambda_3 s_1}$$

$$b_i = a_i \beta_i$$

3. $c_i = \frac{S}{s_i} + 2\vartheta_{i+1} - 2\vartheta_{i-1} + 2\vartheta_i \cdot \frac{s_{i-1} - s_{i+1}}{s_i} - \varphi_i \gamma_i^2 \left(\frac{n_i}{n_i - 1}\right)^2 \frac{s_{i-1} \cdot s_{i+1}}{s_i}$

4. $K_1 = a_1 a_2 (c_2 + c_1) + b_1^2 + a_1 (b_2 - 1)^2$

$K_2 = a_2 \cdot c_2 + b_2^2 + 2(b_1 - b_3)$

$K_3 = a_2 a_3 (c_2 + c_3) + b_3^2 + a_3 (b_2 + 1)^2$

5. $\eta_1 = \sqrt{K_1 - a_1(\eta_2 - 1)^2}, \quad \eta_3 = \sqrt{K_3 - a_3(\eta_2 + 1)^2}$

$$2(\eta_1 - \eta_3) = K_2 - \eta_2^2$$

6. $$x_i = \frac{n_i}{n_i + 1} \frac{b_i - \eta_i}{\gamma_i \cdot a_2}$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{r_i} \\ \frac{1}{r'_i} \end{array}\right\} = x_i - R_i \pm \frac{\varphi_i}{2(n_i - 1)}$$

30. Das modifizierte Taylorobjektiv. Nach den vorstehenden Formeln habe ich eine Reihe von Objektiven gerechnet, indem ich die erste und die dritte Linse aus Kron, die mittlere aus Flint annahm und zwei bestimmten Glassorten entsprechend:

$$n_1 = n_3 = 1{,}51345, \quad n_2 = 1{,}56857, \quad \nu_1 = 57{,}6, \quad \nu_2 = 35{,}8$$

setzte. Es waren zunächst die Abstände und Brennweiten nach den Gleichungen (108) und (109) abzuleiten, indem von einem bestimmten Wert des Parameters $y = \frac{1}{1 - d_2}$ ausgegangen wurde. Da d_2 eine kleine positive Grösse sein muss, so hat man y etwas grösser als 1 zu wählen. Da ferner auch d_1 positiv sein muss, kommen nur solche Werte von y in Betracht, die positive Lösungen der Gleichung (108) für $z = \frac{d_1}{d_2}$ ergeben. Die Gleichung (108) lautet im vorliegenden Falle numerisch:

$$(1 + zy)\left(1 + \frac{z}{y}\right) = 0{,}9463\left(1 + z \cdot \frac{0{,}9634 + y}{1{,}9634}\right)^2$$

Man findet, dass dieselbe nur für $y > 1{,}0550$ positive Lösungen hat. Dementsprechend sind die folgenden Werte von y gewählt, aus denen sich dann die darunter stehenden Werte der Abstände und Brennweiten ergaben:

119)

y	1,0550	1,075	1,125	1,150	1,1625	1,175
d_1	∞	0,2054	0,0976	0,0863	0,0825	0,0796
d_2	0,0521	0,0698	0,1111	0,1304	0,1398	0,1489
φ_1	+0,000	+1,296	+2,735	+3,099	+3,242	+3,365
φ_2	−5,584	−5,600	−5,644	−5,664	−5,676	−5,686
φ_3	+5,379	+4,099	+2,703	+2,357	+2,225	+2,113



Die Berechnung der Durchbiegungen nach dem in voriger Nummer gegebenen Schema habe ich für die beiden Werte $y = 1{,}150$ und $y = 1{,}1625$ durchgeführt mit dem Ergebnis:

			1. Linse	2. Linse	3. Linse
120)	$y = 1{,}150$	$\frac{1}{r}$	$+4{,}490$	$-5{,}127$	$-1{,}069$
		$\frac{1}{r'}$	$-1{,}507$	$+4{,}732$	$-5{,}630$
121)	$y = 1{,}1625$	$\frac{1}{r}$	$+4{,}804$	$-4{,}913$	$-1{,}035$
		$\frac{1}{r'}$	$-1{,}469$	$+4{,}968$	$-5{,}340$

Die zweite Form hat die kleineren Krümmungen und, wie man aus der Aenderung der Radien von einer Form zur andern und dem Gang der Brennweiten in Tabelle (119) erkennt, offenbar sehr nahe die kleinsten Krümmungen, die überhaupt bei diesem Typus möglich sind.



Fig. 9.

Unser Resultat ist also dieses: Aus drei Linsen lässt sich ein achromatisches Objektiv mit nicht allzu starken Krümmungen herstellen, welches von allen Fehlern dritter Ordnung (bis auf die Verzeichnung) frei ist. Im Vergleich zu dem durch (98) gegebenen modifizierten Petzvaltypus ist die gegenwärtige Form im Nachteil, insofern sie stärkere Krümmungen (im Maximum $\frac{1}{r} = 5$, statt 4) verlangt. Ein gegewisser Vorteil ist dagegen die geringe Dicke des Objektivs ($d = d_1 + d_2 = 0{,}222$ gegen 0,4 bei unserem Beispiel für den Petzvaltypus), welche die Abblendung der Strahlen im Objektiv selbst bei grossem Axenabstand des Objekts vermindert. Das sekundäre Spektrum hat den Betrag 1,42, ist also etwa gerade so gross, wie bei dem modifizierten Petzvaltypus.

31. Das eigentliche Taylorobjektiv. Analog wie bei den Systemen aus 4 Linsen wird man aber auch hier zu fragen haben, ob man nicht die Erfüllung der Petzvalbedingung aufgeben und statt dessen die Krümmungen reduzieren soll. Das Objektiv, das man auf diese Weise erhält, entspricht einem zuerst (1893) von dem englischen Optiker H. D. Taylor angegebenen Typus.

Gibt man die Petzvalbedingung auf, so bestehen zwischen den Abständen und Brennweiten der drei Linsen nur die ersten 3 Gleichungen des Systems (105):

122)
$$\begin{aligned} \varphi_1 d_1 &= \varphi_3 d_2 (1 - d_2), \\ 1 &= \varphi_1 \frac{d_1 + d_2}{d_2} + \varphi_3 (1 - d_1 \varphi_1), \\ 0 &= \varphi_1 \nu (d_1 + d_2 - d_1 d_2) + \varphi_3 d_2 (1 - \varphi_1 d_1)^2. \end{aligned}$$

Man wird also etwa die Abstände d_1, d_2 als Parameter geben und daraus die Brennweiten ableiten.

Man findet durch Elimination von φ_1 und φ_3 die quadratische Gleichung für φ_2:

$$123)\qquad \varphi_2^2 - \varphi_2\left[1 + \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right] = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}$$

und nach deren Auflösung die Brennweiten φ_1 und φ_3 aus den sich unmittelbar ergebenden Gleichungen:

$$124)\qquad \varphi_1 d_1 = \varphi_3 d_2 (1 - d_1) = 1 - \nu + \frac{\nu}{\varphi_2}$$

Sind die Brennweiten gefunden, so erfolgt die Bestimmung der Durchbiegungen wieder nach dem Schema (C).

Die Schwierigkeit liegt hier in der Auswahl der beiden willkürlichen Abstände d_1 und d_2. Ich bin in der Weise verfahren, dass ich zunächst die Gesamtdicke des Systems, um in der Nähe des durch (121) gegebenen Objektivs zu bleiben, gleich $^1/_4$ der Brennweite annahm. Als optische Konstanten der Glassorten wurden wieder schematische Werte $n_1 = n_3 = 1{,}5$, $n_2 = 1{,}6$, $\nu_1 = \nu_3 = 60$, $\nu_2 = 36$ verwandt. Es war dann die Gesamtdicke in geeigneter Weise auf die Abstände d_1 und d_2 zu verteilen. Hat man über das Verhältnis $\frac{d_1}{d_2}$ verfügt, so bleibt noch bei der Auflösung der Gleichung (123) zwischen den beiden Wurzeln derselben zu entscheiden. Ich habe hier zunächst diejenige Wurzel verfolgt, welche dadurch charakterisiert ist, dass sie für $d_2 = 0$ unendlich wird. Es lässt sich aus den einfachen Gleichungen (123) und (124) leicht übersehen, wie die Brennweiten bei wechselnden Werten des Verhältnisses $\frac{d_1}{d_2}$ wandern. Meine erste Absicht war, unbekümmert um die Durchbiegungen zunächst einmal eine Anordnung mit möglichst kleinen Brennweiten der drei Linsen aufzusuchen, in der Hoffnung, dass sich dann auch kleine Krümmungen ergeben würden. Dieselbe fand sich für $\frac{d_1}{d_2} = 0{,}311$. Mit den hieraus folgenden Abständen rechnete ich die Brennweiten und begann nach dem Schema (C) die Durchbiegungen zu suchen. Dabei stellte sich heraus, dass die Gleichung 8. Grades für η_2 keine reelle Wurzel hatte. Es liegt dies natürlich an den nach § 5 bestehenden Grenzen für die Fehler der Einzellinse. Da dieser Gedanke also verfehlt war, änderte ich das Verhältnis $\frac{d_1}{d_2}$ willkürlich in die Werte 0,54, 1,00, 1,222. Die beiden ersten dieser Werte ergaben ebenfalls keine reellen Wurzeln der Gleichung 8. Grades, hingegen war durch den letzten Wert die Stelle des ersten Auftretens reeller Wurzeln offenbar eben überschritten.

Es ergaben sich mit diesem letzten Werte die folgenden Objektivabmessungen, welche jedenfalls sehr nahe die kleinstmöglichen Krümmungen aufweisen:

125)		1. Linse	2. Linse	3. Linse
	$\frac{1}{r}$	$+3,69$	$-3,54$	$+1,14$
	$\frac{1}{r'}$	$-0,22$	$+4,08$	$-4,24$

$$d_1 = 0,1375, \quad d_2 = 0,1125$$



Fig. 10.

Damit ist eine Form des Taylorobjektives gegeben. Eine zweite Form, bei welcher die Linse näher an die erste rückt, die ich aber nicht untersucht habe, würde aus der andern Wurzel der Gleichung (123) abzuleiten sein.

Man sieht, dass die Krümmungen hier keineswegs so weit herabgedrückt werden können, wie beim Petzvaltypus (95), und in der Tat scheint sich auch das grosse Oeffnungsverhältnis, das der Petzvaltypus in Praxis gewährleistet, hier nicht ganz erreichen zu lassen. Indessen bleibt man bei dem Taylorobjektiv der Erfüllung der Petzvalbedingung viel näher, als beim Petzvaltypus[1]). Es findet sich nämlich aus den Zahlen in (125): $\sum \frac{\varphi_i}{n_i} = 0,24$. Die zugehörige Streuung ist:

126) $$3'', 2 g^2 v.$$

Für das Oeffnungsverhältnis 1 : 10 würde sich hieraus ein Gesichtsfeld von 13° Durchmesser ergeben. Das Taylorobjektiv übertrifft also den Petzvaltypus in Bezug auf das brauchbare Gesichtsfeld.

Der Betrag des sekundären Spektrums ist: $\Phi' = 1,40$.

§ 10. Zusammenfassung.

Mit den vorstehenden Rechnungen ist nun im Wesentlichen das Ziel erreicht, auf einigermassen rationellem, deduktivem Wege die üblichen Formen astrophotographischer Objektive zu gewinnen, zu welchen die praktische Optik von den verschiedensten Gesichtspunkten aus und mit Hülfe der verschiedensten Methoden im Laufe ihrer historischen Entwicklung gelangt ist. Die Resultate der kritischen Uebersicht, welche mit der Deduction verbunden war, lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

1) Während sich dies bei unserem Ableitungsmodus hinterher ergibt, geht die praktische Auffindung dieses Typus durch H. Taylor direkt von einer ungefähren Berücksichtigung der Petzvalbedingung aus. (Vgl. v. Rohr, l. c. pag. 237.)

Farbenfehler.

Jedes brauchbare Objektiv erfüllt die beiden Bedingungen der Achromasie, welche fordern, dass sowohl die Lage der Bildebene als die Vergrösserung — nach den Formeln der Gauss'schen Dioptrik gerechnet — für zwei Farben dieselbe sei. Für jede dritte Farbe bleibt dann noch eine Abweichung bestehn, das sog. sekundäre Spektrum. Das sekundäre Spektrum bildet in Praxis den schlimmsten Fehler der astrophotographischen Objektive infolge der Gültigkeit folgender Sätze: Aus Glas von einer Sorte lassen sich überhaupt keine achromatischen Objektive, sondern nur Okulare (Systeme mit virtuellem Bild) konstruieren. Bei Verwendung sog. alter Gläser lässt sich das sekundäre Spektrum nicht unter ein gewisses noch immer sehr erhebliches Mindestmass herabdrücken. Es wird z. B. bei optischer Korrektion des Systems (gleicher Vereinigungsweite für die C und die F-Linie) der kleinstmögliche Durchmesser des Zerstreuungskreises für die G'-Linie gleich 33″. v (v bezeichnet das Oeffnungsverhältnis mit $f/10$ als Einheit). Für alle sehr dünnen Systeme, wie für das gewöhnliche Fernrohrobjektiv, wird der Durchmesser des Zerstreuungskreises gleich 37″. v. Durch Verwendung neuer Gläser lässt sich das sekundäre Spektrum nur wesentlich verkleinern, wenn man starke Krümmungen der Flächen zulässt und sich damit auf Systeme von geringem Oeffnungsverhältnis beschränkt.

Fehler dritter Ordnung.

In Bezug auf die Beseitigung der Fehler dritter Ordnung ergibt sich folgende Reihenfolge der verschiedenen Objektivtypen. Sämtliche Formen sind von sphärischer Aberration und Koma befreit, sodass die Unterschiede nur in den übrig bleibenden Beträgen der Bildwölbung und des Astigmatismus liegen, wenn wir von der astronomisch unwesentlichen Verzeichnung absehn.

a) Das gewöhnliche Fernrohrobjektiv ist mit starker Bildwölbung und starkem Astigmatismus behaftet. Die Krümmungsradien der tangentialen und der sagittalen Bildfläche sind mit der Brennweite als Einheit:

$$\varrho_t = \frac{1}{3{,}7}, \quad \varrho_s = \frac{1}{1{,}7}$$

Die zugehörigen Streuungen in radialer resp. tangentialer Richtung sind:

$$104''g^2v \text{ resp. } 47''g^2v.$$

(g ist der Gesichtsfelddurchmesser mit 6° als Einheit.) In einer Entfernung von 1°.5 von der Axe ($g = \frac{1}{4}$) werden die Sterne daher als Ellipsen gezeichnet, deren Axen beim Oeffnungsverhältnis $^1/_{10}$ gleich 26″ resp. 12″ sind. Da sich derartige Streuungen schon sehr deutlich neben dem sekundären Spektrum bemerklich machen, so ist das gewöhnliche Fernrohrobjektiv beim Oeffnungsverhältnis $^1/_{10}$ höchstens für ein Gesichtsfeld von 3° Durchmesser brauchbar. Eine wesentliche Verringerung der Fehler ist nicht möglich, solange man sich auf ein einzelnes sehr dünnes Linsensystem beschränkt.

Die Petzvalbedingung. Geht man weiter zu den aus mehreren getrennten dünnen Teilen bestehenden Objektiven, so lässt sich neben sphär. Aberration und Koma auch noch die Bildwölbung beseitigen, aber eine Schwierigkeit entsteht, wenn man den letzten Fehler, den Astigmatismus gleichzeitig zum Verschwinden bringen will, infolge der sog. Petzvalbedingung. Dieselbe besagt, dass als notwendige (nicht hinreichende) Bedingung die Gleichung:

$$\Sigma \frac{\varphi_i}{n_i} = 0$$

gelten muss (φ_i die reziproke Brennweite, n_i der Brechungsexponent der einzelnen Linse), wenn alle Fehler 3. Ordnung beseitigt sein sollen. Es zeigt sich nun, dass diese Bedingung unter den in Praxis gültigen Verhältnissen nicht ohne stärkere Krümmungen einzelner brechender Flächen erfüllt werden kann. Es hat daher den Anschein, als ob man fehlerfreie Objektive wegen der starken erforderlichen Krümmungen nur unter Verzicht auf grössere Lichtstärke erhalten könnte. Doch ist die Schwierigkeit in Wirklichkeit nicht so bedenklich, denn es erweist sich in vielen Fällen als überflüssig, die Petzvalbedingung zu erfüllen auf Grund des folgenden Satzes: Wenn man sphärische Aberration, Koma und Bildwölbung beseitigt hat, ohne die Petzvalbedingung besonders zu beachten, so bleibt zwar immer der vierte Fehler, der Astigmatismus, bestehn, aber er ist bei den in Praxis gültigen Verhältnissen von selbst auf einen numerisch unbedeutenden Betrag reduziert. Der Durchmesser der Zerstreuungskreise, die von dem Astigmatismusrest herrühren, beträgt nämlich für durchschnittliche Verhältnisse etwa:

$$9''.g^2 v,$$

sodass bei einem Oeffnungsverhältnis $1/10$ resp. $1/5$ ($v = 1$ resp. 2) ein Gesichtsfeld von 8° resp. 6° Durchmesser astronomisch brauchbar bleibt. Nur bei Beanspruchung eines noch grösseren Gesichtsfelds muss also die Petzvalbedingung näher berücksichtigt werden.

Die bisher üblichen astrophotographischen Objektive sind in der Tat sämtlich von der Art, dass sie die Petzvalbedingung nicht erfüllen und mit Astigmatismus behaftet sind.

b) Objektive aus 2 getrennten dünnen Teilen. Sucht man Objektive aus zwei getrennten dünnen Teilen herzustellen, so fordert die gleichzeitige Achromatisierung des Bildorts und der Bildgrösse, dass jeder Teil für sich achromatisiert sein und daher mindestens aus zwei Linsen bestehn muss, sodass im ganzen vier Linsen nötig sind. Schreibt man dem Systeme vor, dass sphärische Aberration, Koma und Bildwölbung beseitigt sein sollen, so bleibt noch so viel Willkürlichkeit in der Anordnung, dass die Optiker — ohne das ausdrücklich auszusprechen — die Forderung hinzugenommen haben, jedes Teilsystem solle für sich von sphärischer Aberration frei sein. Diese

Festsetzung vereinfacht die Uebersicht und ermöglicht, das erste Teilsystem getrennt als sogenanntes Landschaftsobjektiv zu verwenden. Je nachdem man die beiden äusseren Linsen aus Kron, die inneren aus Flint nimmt, oder die umgekehrte Anordnung der Glassorten wählt, erhält man aus der Gesamtheit dieser Bedingungen direkt den *Petzvaltypus* (Fig. 5) oder den *Typus des Steinheilschen Aplanaten* (Fig. 8). Beide Typen haben infolge der Nichterfüllung der Petzvalbedingung denselben Rest von Astigmatismus und zwar ist derselbe etwas grösser, als die obige Abschätzung angibt, die Streuung beträgt nämlich:

$$12'' g^2 v$$

und beschränkt das Gesichtsfeld beim Oeffnungsverhältnis 1:10 resp. 1:5 auf 7° resp. 5° Durchmesser. Das sekundäre Spektrum ist bei beiden Typen etwas kleiner, als beim gewöhnlichen Fernrohrobjektiv, und überhaupt nahe auf den möglichen Minimalwert. Der Petzvaltypus zeichnet sich vor dem Aplanaten durch geringere Krümmungen der Flächen aus.

c) *Objektive aus drei getrennten dünnen Teilen.* Steigt man schliesslich zu Objektiven aus drei getrennten dünnen Teilen auf, so kann man die beiden chromatischen Bedingungen erfüllen, auch wenn man jeden Teil nur aus einer einzelnen Linse bestehen lässt. Sphärische Aberration, Koma und Bildwölbung lassen sich gleichfalls durch geeignete Durchbiegung dreier getrennter Linsen beseitigen. Man findet also hier Objektive aus nur 3 Linsen, die allein noch mit Astigmatismus behaftet sind. Sucht man unter denselben eine Form mit möglichst geringen Krümmungen, so gelangt man zum *Taylorobjektiv* (Fig. 10). Die Petzvalbedingung ist bei demselben zwar auch nicht strenge, aber doch sehr viel näher erfüllt, als bei Aplanat und Petzvaltypus. Die restierende Streuung durch Astigmatismus beträgt nur:

$$3'',2 \cdot g^2 v,$$

sodass sich beim Oeffnungsverhältnis 1:10 ein brauchbares Gesichtsfeld von 13° Durchmesser ergeben würde. Das sekundäre Spektrum ist 1,4 mal grösser, als beim gewöhnlichen Fernrohrobjektiv.

d) *Beseitigung aller Fehler dritter Ordnung.* So viel ergab sich über die üblichen astrophotographischen Systeme. Es wurden nun aber auch trotz der erwähnten Schwierigkeiten Objektivformen gesucht, die auch die Petzvalbedingung strenge erfüllen und somit von den astronomisch in Betracht kommenden Fehlern 3. Ordnung gänzlich frei sind. Es ergab sich erstens eine modifizierte Form des Taylortypus (Fig. 9), bei welcher die Durchbiegungen der Linsen gegen den ursprünglichen Typus etwas verstärkt sind und der kleinste Krümmungsradius $1/5{,}3$ der Brennweite beträgt. Ferner fand sich ein modifizierter Petzvaltypus mit strenger Erfüllung der Petzvalbedingung (Fig. 7). Es wurde nämlich die Forderung getrennter sphärischer Korrektion für jedes der beiden Teilsysteme, die beim ursprünglichen Petzvaltypus gilt, fallen gelassen, da sie für astrophotographische

Zwecke belanglos ist, und es liess sich dann die Petzvalbedingung mit Krümmungsradien erfüllen, deren kleinster $^1/_{4.4}$ der Brennweite betrug. Man sieht also, dass die stärkeren Krümmungen, welche die Erfüllung der Petzvalbedingung verlangt, bei geeigneter Anordnung des Systems doch nicht allzu gross ausfallen. Das sekundäre Spektrum ist für die beiden letzten Objektivformen nahe ebenso gross, wie bei dem ursprünglichen Taylortypus.

Schlussbemerkung.

Namentlich mit dem modifizierten Petzvaltypus ist eine Objektivform gefunden, welche allen Anforderungen genügt, die vom Standpunkt der Theorie der Fehler 3. Ordnung aus zu stellen sind. Es ist also in dieser Beziehung ein gewisser Abschluss erreicht. Würde man zu noch komplizierteren Anordnungen übergehn, so würde man zu viele in Bezug auf Fehler dritter Ordnung gleich gute Lösungen finden, zwischen denen auch nach der Kleinheit der Krümmungen nicht recht zu entscheiden wären. An diesem Punkte muss daher die analytische Untersuchung so lange innehalten, bis eine ausführliche Theorie der Fehler 5. Ordnung zu Gebote stehen wird.

Die neueren photographischen Objektive, welche aus mehr als vier oder zum Teil aus dickeren Linsen zusammengesetzt sind, erstreben nicht unmittelbar die grösste Schärfe der Zeichnung für ein mässiges Gesichtsfeld und mittlere Oeffnungen, wie sie für astrophotographische Zwecke verlangt werden muss, sondern suchen für ein sehr grosses Gesichtsfeld und grosse Lichtstärke die Streuungen unter 1′ bis 2′ zu halten. Damit fallen sie ausserhalb des Rahmens der gegenwärtigen Untersuchung.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND IV. Nro. 4.

Die archaeolithische Cultur

in den

Hipparionschichten von Aurillac (Cantal).

Von

Max Verworn.

Mit 5 Tafeln.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1905.

Die archaeolithische Cultur in den Hipparionschichten von Aurillac (Cantal).

Von

Max Verworn.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Juli 1905.

Einleitung.

Die Frage nach Herkunft und Alter des Menschen ist zwar bekanntlich uralt, aber ihre wissenschaftliche Behandlung beginnt erst im vorigen Jahrhundert. Die anfangs so viel angefeindeten Arbeiten von Boucher de Perthes lieferten das erste wichtige Erfahrungsmaterial. Seitdem ist durch Entdeckung massenhafter Steinmanufacte, vieler Kunstwerke und zahlreicher Skelettreste des Menschen in diluvialen Schichten die Existenz des Menschen zur Diluvialzeit über allen Zweifel gesichert worden.

Die Thatsache, dass die aufgefundenen Skeletttheile des Menschen uns unsere diluvialen Vorfahren im wesentlichen bereits auf unserer jetzigen morphologischen Entwicklungsstufe als wirkliche Menschen zeigen, musste es aber schon längst jedem modernen Naturforscher, der auf dem Boden der Descendenzlehre steht, höchst wahrscheinlich machen, dass die Anfänge der Entwicklung unseres Geschlechts und seiner specifisch menschlichen Charaktere weit über das Diluvium zurückreichen, mindestens bis tief in die Tertiärzeit hinein.

Trotz dieser theoretischen Forderung der Naturforschung ist die moderne Wissenschaft nur sehr zögernd an die Frage nach dem tertiären Menschen herangetreten und hat sich allen Angaben über die Spuren desselben ausserordentlich

misstrauisch gegenübergestellt. Durchaus mit Recht, denn in aller wahren Wissenschaft muss jede Erkenntniss erst das kritische Feuer des Zweifels passiert haben, ehe sie Anerkennung finden darf.

Seit einigen Jahren hat die Frage indessen ein anderes Gesicht angenommen. Rutot in Brüssel hat es verstanden, durch eine Reihe epochemachender Untersuchungen über das älteste Diluvium Belgiens die schon mehrfach von belgischen und englischen Forschern wie Neyrinckx, Delvaux, Prestwich u. a. vertretene Ansicht von der Existenz steinzeitlicher Culturen, die uns viel primitivere Verhältnisse zeigen, als sie uns bisher geläufig waren, immer mehr zur Anerkennung zu bringen.

Diese Erfahrungen des ausgezeichneten Brüsseler Geologen haben die Anregung dazu gegeben, in der Frage des tertiären Menschen nunmehr von der culturgeschichtlichen Seite her einen neuen Vorstoss zu machen[1]). Unter den neuen Gesichtspunkten ist die Discussion über die Funde von tertiären Feuerstein-Werkzeugen aus Thenay, Aurillac, St. Prest in Frankreich, Otta in Portugal, dem Kalkplateau von Kent in England, die namentlich in den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts in Frankreich äusserst lebhaft war, wieder aufgelebt und in ein neues Stadium getreten.

In Deutschland hat Klaatsch[2]) das Verdienst, zuerst die Bekanntschaft mit den Rutot'schen Ideen vermittelt und zugleich die Frage der tertiären Feuerstein-Werkzeuge von neuem angeregt zu haben. Das Interesse für diese Dinge ist in Deutschland ganz plötzlich während der letzten zwei oder drei Jahre erwacht und hat sich mit ungewöhnlicher Schnelligkeit und Lebhaftigkeit auszubreiten begonnen, vor allem im Anschluss an die Discussionen, die in der Berliner Gesellschaft für Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte seit dem Jahre 1903[3]) über die Frage der primitiven Feuersteinculturen stattgefunden haben. Ein lebhaftes Für und Wider die Werkzeugnatur der sogenannten „Eolithen" hat sich entsponnen. Eine Menge neuer und wichtiger Gesichtspunkte sind aufgetaucht.

Ich muss gestehen, dass ich noch vor weniger als einem Jahre der Annahme von der Werkzeugnatur der „Eolithen" mehr als skeptisch gegenüberstand und meinen Bedenken auch in der Sitzung der Göttinger Anthropologischen Gesellschaft vom 22. Juli 1904 gelegentlich Ausdruck gegeben habe.

---

1) Das Studium der Arbeiten Rutots, die seit den 90er Jahren zum grössten Theil in dem „Bulletin de la société Belge de Géologie" und in dem „Bulletin de la société d'Anthropologie de Bruxelles", besonders aber in seinem letzten zusammenfassenden Werke „Le Préhistorique dans l'Europe centrale", Namur 1904 niedergelegt sind, ist heute unentbehrlich für Jeden, der sich mit den primitiven Feuersteinculturen beschäftigen will.

2) H. Klaatsch: „Anthropologische und palaeolithische Ergebnisse einer Studienreise durch Deutschland, Belgien und Frankreich". In Zeitschr. f. Ethnologie, Bd. 35, Jahrg. 1903, pag. 92. Ferner: „Entstehung und Entwicklung des Menschengeschlechts". In „Weltall und Menschheit". Bd. 2.

3) Vergl. die Verhandlungen der Berliner Ges. f. Anthropol., Ethnol. u. Urgesch. in d. Zeitschr. f. Ethnol., Bd. 35, Jahrg. 1903 u. Bd. 36, Jahrg. 1904.

Freilich waren mir damals aus eigener Anschauung nur die Funde von Dr. HAHNE aus dem Diluvium der Magdeburger Gegend bekannt und ich kann sagen, dass ich für einen grossen Theil der HAHNE'schen „Eolithen“ im Hinblick auf die starken anorganischen Einflüsse und die Bedingungen ihres Vorkommens auch heute noch meine Skepsis nicht überwinden kann, wenn ich auch anerkenne, dass einzelne Stücke höchst wahrscheinlich die Spuren menschlicher Einwirkung tragen[1]). Inzwischen war Herr RUTOT im vorigen Jahre so liebenswürdig, mir eine grössere Serie typischer Eolithen aus den verschiedenen Stufen des belgischen Diluviums zum Geschenk zu machen, nach deren genauer Analyse ich keinen Zweifel an ihrer Werkzeugnatur mehr hegen konnte. Es war eine starke Erregung, die sich damals meiner bemächtigte. Werden doch durch diese Funde die Spuren primitiver Cultur weit über die bisher nachgewiesenen Grenzen zurück verlegt. Zugleich entstand für mich die Frage, ob solche Spuren auch bereits im Tertiär unzweideutig nachweisbar sein möchten. Die positiven Angaben darüber aus früherer Zeit, die z. Th. mit grosser Bestimmtheit aufgetreten waren, hatten sich keine allgemeine Anerkennung zu verschaffen vermocht. Für mich war zwar die Existenz des Menschen in der Tertiärzeit aus theoretischen Gründen garnicht zweifelhaft, aber etwas ganz anderes war doch die Frage, ob der tertiäre Vorfahre des Menschen bereits Werkzeuge gehabt habe, die uns seine Anwesenheit in jener entlegenen Zeit verrathen könnten. In diesem Punkte war ich noch immer sehr skeptisch. Wenn auch KLAATSCH und RUTOT sich von der Existenz tertiärer „Eolithen“ überzeugt zu haben glaubten und von solchen auch einige Abbildungen gegeben hatten[2]), so konnte ich mich doch nicht entschliessen, nach Beschreibungen und Abbildungen allein die Werkzeugnatur derselben anzuerkennen. Hier ist es unerlässlich, für Jemanden, der ein eigenes Urtheil gewinnen will, die Objecte selbst in den Händen zu haben, um sie drehen und wenden und in Bezug auf ihre Einzelheiten genau analysieren zu können. Ausserdem ist es nothwendig, die Objecte und ihr Vorkommen an Ort und Stelle kennen zu lernen, damit man auch hinsichtlich ihres geologischen Alters die Gewissheit gewinnen kann, die man verlangt. So beschloss ich, durch eigene Ausgrabungen an Ort und Stelle mich selbst zu

1) Herr Dr. HAHNE war so freundlich, mir im April 1904 bei einem Besuch in Magdeburg seine Sammlung zu zeigen und seine Stücke zu erläutern, sowie auch Herrn Prof. BRACHT und mich auf einem Besuch der Fundstätte von Schönebeck bei Magdeburg zu begleiten. Auch hat mir Herr Dr. HAHNE später noch zweimal eine Anzahl seiner Stücke in liebenswürdiger Weise zum genaueren Studium übersandt, wofür ich ihm zu grossem Dank verpflichtet bin.

2) Vergl. KLAATSCH in Zeitschr. f. Ethnol. Bd. 35, Jahrg. 1903, pag. 130 u. 131. Diese Abbildungen sind leider sehr ungeeignet, Jemandem, der die Objecte nicht selbst genau kennt, ein Urtheil zu ermöglichen. Bedeutend besser sind die Abbildungen, die KLAATSCH in einer soeben erschienenen Mittheilung über „die tertiären Silexartefacte aus den subvulkanischen Sanden des Cantal“ im Archiv für Anthropologie N. F. Bd. III, Heft 3, 1905 publiciert hat. Zweckmässig erscheint mir ausser der photographischen Wiedergabe die Reproduction von Zeichnungen der Objecte unter Verwertung der Photographie, wie sie RUTOT in seinem Buche: „Le Préhistorique dans l'Europe centrale“, Namur 1904, gegeben hat.

überzeugen und hoffte um so mehr in der Lage zu sein, mir ein abschliessendes Urtheil in der Frage für oder wider die Werkzeugnatur der tertiären Feuersteine bilden zu können, als ich seit mehreren Jahren durch experimentelle Studien an Feuersteinen verschiedener Herkunft mit den charakteristischen Spuren menschlicher Einwirkung genauer vertraut war[1]). Ich kann sagen, dass ich in der That gänzlich ohne vorgefasste Meinung nach der einen oder anderen Richtung hin meine Reise antrat. Es hätte mich ebenso interessiert, die Frage im negativen wie im positiven Sinne zu beantworten.

Seitdem Boucher de Perthes die palaeolithischen Culturen in Frankreich entdeckt hat, ist Frankreich das klassische Land für die Erforschung der ältesten Spuren menschlicher Cultur geblieben. Aus Frankreich stammen auch die ersten Angaben über das Vorkommen tertiärer Feuersteinwerkzeuge. Hier hat schon im Jahre 1867 der Abbé Bourgeois[2]) auf dem Congrès international d'anthropologie et d'archéologie préhistoriques seine Aufsehen erregende Mittheilung über die angeblich vom Menschen benutzten Feuersteine im Oligocän von Thenay (Loir-et-Cher) gemacht, die später zu unendlichen Discussionen Anlass gegeben haben[3]). Indessen das Ergebniss dieser Discussionen war so wenig befriedigend und die letzte eingehende Untersuchung der Objecte durch Capitan und Mahoudeau[4]) so negativ, dass mir ein Besuch von Thenay nicht die gewünschte Entscheidung zu bringen versprach. Aussichtsvoller schienen mir nach den bisherigen Angaben Untersuchungen in Aurillac (Cantal) zu sein, wo schon vor mehreren Jahrzehnten im oberen Miocän Feuersteine gefunden worden waren, die mit grosser Bestimmtheit von einzelnen Forschern als Werkzeuge angesprochen wurden. Über die gleichaltrige Fundstelle von Otta bei Lissabon lagen keine neueren Angaben vor. Die englischen Funde vom Kalkplateau

1) Das Material für diese Studien stammte zum Theil aus Limnhamn in Südschweden, zum Theil aus der Rügenschen Kreide, zum Theil aus der Lüneburger Heide. Ehe ich meine Reise antrat, stellte ich noch einmal eingehende Versuche an Feuerstein aus Lüneburg an, den ich der Liebenswürdigkeit meines Collegen, Herrn Geheimraths von Koenen verdankte. Ich betrachte experimentelle Studien am Feuerstein als ein ganz unerlässliches Erforderniss für Jeden, der sich mit der Frage der primitiven Feuersteinwerkzeuge beschäftigt. Die experimentelle Untersuchung der Eigenschaften des Feuersteins eröffnet eine solche Fülle von Gesichtspunkten, die unmöglich auf anderem Wege zu gewinnen sind, dass ich ein stetes Hand in Handgehen experimenteller Studien mit culturgeschichtlichen Untersuchungen über die primitiven Culturen selbst bei den kleinsten Einzelproblemen für unentbehrlich halte. Im Experiment haben wir eine stete Controlle für alle Anschauungen und Vorstellungen, die wir auf anderem Wege gewonnen haben und deshalb möchte ich von Jedem, der in der Frage nach der Werkzeugnatur der „Eolithen" ein eigenes Urtheil abgeben will, verlangen, dass er sich in experimentelle Studien am Feuerstein vertieft hat.

2) Bourgeois: „Etude sur des silex travaillés trouvés dans les dépôts tertiaires de la commune de Thenay, près Pontlevoy (Loir-et-Cher)". In Compte rendu du Congrès international d'anthr. et d'archéol. préhist. de Paris 1867.

3) Vergl. besonders: „Matériaux pour l'histoire primitive et naturelle de l'homme". Jahrgänge 1884, 1885, 1886.

4) L. Capitan et P. Mahoudeau: „La question de l'homme tertiaire à Thenay". In Revue de l'Ecole d'Anthropologie de Paris 1901.

von Kent, sowie die Funde von St. Prest bei Chartres in Frankreich sind pliocän, also jünger als die von Aurillac. Mir schien nach alledem Aurillac der geeignetste Angriffspunkt für meine Studien zu sein.

Ehe ich im April 1905 nach Aurillac ging, blieb ich mehrere Tage in Brüssel, um bei RUTOT Studien an dem überaus reichen Feuerstein-Material des Musée Royal d'histoire naturelle zu machen, das hinsichtlich der primitiven Culturen nirgends seines Gleichen hat. Es drängt mich an dieser Stelle, Herrn RUTOT meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das grosse Entgegenkommen, mit dem er mir seine Reihen gezeigt und erläutert hat. Die Anregung, welche ich von dem ebenso ideenreichen wie liebenswürdigen Forscher empfangen habe ist mir äusserst werthvoll gewesen. Abgesehen von den umfangreichen Sammlungen belgischer Steinwerkzeuge aus den verschiedenen Niveaus, die eine wahre Fundgrube für die Erforschung primitiver Culturzustände bilden, habe ich bei RUTOT auch bereits eine Reihe von miocänen Feuersteinen aus Aurillac gesehen, die er der Güte der Herren PIERRE MARTY und CHARLES PUECH in Aurillac verdankt. Schon diese Reihe enthielt Stücke, die ich mir nicht leicht anders als durch die Einwirkung des Menschen beeinflusst denken konnte, und das Gleiche war der Fall mit einer grossen Reihe von Feuersteinen derselben Herkunft, die ich bald darauf bei CAPITAN in Paris zu sehen Gelegenheit fand. Auch Herrn CAPITAN bin ich für die freundliche Demonstration seiner reichen Sammlung sehr dankbar. CAPITAN hat ebenso wie bald darauf KLAATSCH selbst in Aurillac gegraben, doch steht die Publication seines Materials noch aus. Zwang mich nun zwar die Betrachtung und Prüfung dieser Funde schon dazu, mich mit dem Gedanken einer miocänen Feuersteincultur in der Auvergne vertraut zu machen, so muss ich doch gestehen, dass meine wissenschaftliche Skepsis, und, wenn man will, auch alt hergebrachte Vorurtheile in dieser wichtigen Frage noch stark genug wirkten, um meine positive Entscheidung immer wieder durch allerlei neu ersonnene Bedenken ins Wanken zu bringen. Ich musste die Dinge an Ort und Stelle sehen, ich musste die Fundverhältnisse selbst kennen lernen, ich musste die Stücke eigenhändig aus der Erde nehmen, sonst konnte ich keine Sicherheit finden. So ging ich nach Aurillac.

Wenn meine Arbeiten während der verhältnissmässig kurzen Zeit meines Aufenthalts in Aurillac — ich war im Ganzen 6 Tage dort — zu einem unerwartet glücklichen Erfolg geführt haben, so verdanke ich das in erster Linie dem ganz ausserordentlich gastfreundlichen Entgegenkommen, mit dem die Herren PIERRE MARTY und CHARLES PUECH bereits für mich vorgearbeitet hatten. Herr MARTY, der als Geologe noch kürzlich eine ausgezeichnete Monographie der fossilen Flora des oberen Miocäns von Joursac geschrieben hat, die mir ein äusserst werthvolles Bild von der Natur des Cantal in jener Zeit verschaffte, hat nicht nur die Freundlichkeit gehabt, mich in die geologischen Verhältnisse des Cantal einzuführen, sondern er hatte auch bereits am Puy de Boudieu eine Stelle, die er selber vor Jahren entdeckt hatte, für mich freilegen lassen, so dass ich bei meiner Ankunft bereits die frisch geöffnete miocäne Tuffschicht

vorfand, deren Ausbeutung mir in der Folge das meiste Material geliefert hat. Herr PUECH als Geologe und Strassenbau-Ingenieur des Départements Cantal ebenfalls mit den geologischen Verhältnissen der Umgebung von Aurillac bis in die kleinsten Einzelheiten hinein bekannt, hat mir gleichfalls auf unseren Excursionen die Geologie der Gegend eingehend demonstriert, und meine Arbeiten durch den Nachweis der sehr eng lokalisierten Fundstellen am Puy Courny, bei Veyrac, im Gehölz von la Condamine und bei Belbex sowie durch die Besorgung erfahrener Arbeiter auf das Wirksamste gefördert. Beiden Herren sage ich für die weitgehende Gastfreundschaft und Unterstützung bei meinen Arbeiten meinen herzlichsten Dank. Ebenso möchte ich Herrn GRANDVAUX, der mir gleichfalls mit seinen bei früheren Ausgrabungen gesammelten Erfahrungen zur Seite stand und eigenhändig an meinen Ausgrabungen theilnahm, an dieser Stelle verbindlichst danken.

So habe ich denn unter den günstigsten Verhältnissen meine Ausgrabungen in der Umgegend von Aurillac vornehmen können. Das Ergebnis derselben war, dass ich gleich bei der ersten Ausgrabung am Puy de Boudieu das Glück hatte, auf eine Stelle zu stossen, an der ich eine grosse Anzahl von Feuersteinen fand, deren unbestreitbare Manufactnatur mich anfangs geradezu verblüffte. Ich hatte so etwas nicht erwartet. Nur langsam konnte ich mich an den Gedanken gewöhnen, hier Werkzeuge eines tertiären Menschen in der Hand zu haben. Ich machte mir alle erdenklichen Einwände. Bald zweifelte ich am geologischen Alter, bald wieder an der Manufactnatur der Feuersteine, bis ich widerstrebend einsah, dass alle Einwände die Thatsache nicht zu beseitigen vermochten.

Im Folgenden möchte ich das beweisen. Gleichzeitig spreche ich den Wunsch aus, dass Jeder, der an der Thatsache zweifelt, wie ich es that, selbst gehe und sehe.

Historisches.

Die erste Angabe über tertiäre Feuersteinwerkzeuge aus der Umgebung von Aurillac machte der Geologe CHARLES TARDY. Es war nach der aufsehenerregenden Mittheilung des Abbe BOURGEOIS über seine Funde in Thenay im Jahre 1867, dass man sich für die Frage des tertiären Menschen lebhaft zu interessieren begann und an verschiedenen Stellen Frankreichs nach geschlagenen Feuersteinen in tertiären Schichten suchte. So ist offenbar auch TARDY zu seiner Entdeckung gekommen. TARDY legte in der Sitzung der Société d'anthropologie de Paris vom 16. December 1869 eine geschlagene Feuersteinlamelle vor [1]), die einerseits nach einem dem Bulletin der Gesellschaft beigegebenen Holzschnitt zu urtheilen

1) Bulletin de la soc. d'anthropol. de Paris Tome IV (2. Série) 1869.

ganz zweifellos von Menschenhand geschlagen ist und die andrerseits nach dem von RAMES beigefügten geologischen Profil zu urtheilen auch tertiäres Alter besitzt.

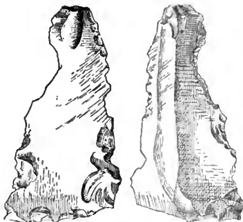


Fig. 1. Erste Abbildung einer abgeschlagenen Feuersteinlamelle aus Aurillac. Nach TARDY.

Indessen ist von MORTILLET im „Préhistorique“ [1]) diese Entdeckung TARDYS mit folgenden Worten abgelehnt worden: „TARDY a signalé un silex incontestablement taillé comme venant du conglomérat trachytique d'Aurillac, mais la coupe qu'il donne montre qu'il n'a pas été trouvé en place. Il provient des alluvions quaternaires. C'est du reste une forme de cette époque“. Damit ist für MORTILLET die Entdeckung TARDYS abgethan. Erst in der Mittheilung, welche RAMES, der bekannte Erforscher der Geologie des Cantal, im Jahre 1877 über tertiäre Feuersteinwerkzeuge vom Puy Courny bei Aurillac an Mortillet sandte, findet dieser die wirkliche Entdeckung der tertiären Werkzeuge. Mir ist diese Darstellung und Begründung MORTILLETS nicht ganz verständlich, denn aus dem von TARDY beigegebenen Profil ist ganz und garnicht zu entnehmen, dass der Feuersteinspahn nicht am Platz gefunden wäre, und ebensowenig ist seine Form, wie wir heute ganz gut wissen, speciell charakteristisch für die diluviale Cultur. Wenn also keine anderen Gründe vorhanden sind, welche den Fund TARDYS in Zweifel ziehen, so scheint mir keine Veranlassung zu bestehen, die Entdeckung der tertiären Feuersteinwerkzeuge von Aurillac TARDY abzusprechen

1) GABRIEL et ADRIEN de MORTILLET: „Le Préhistorique origine et antiquité de l'homme“ Troisième édition pag. 69, Paris 1900.

und Rames zuzuschreiben. Das wäre um so ungerechter, als Rames den von Tardy gefundenen Feuerstein selbst zuerst nicht als bearbeitet anerkannt hat[1]), während Hamy, Mortillet, Broca, Leguay, Roujou, Pruner-Bey und Andere sofort die Spuren absichtlicher Beeinflussung erkannten[2]).

Indessen Rames gebürt das Verdienst, die geologischen Verhältnisse der Umgebung von Aurillac in eingehendster Weise studiert und aufgeklärt zu haben. Rames war selbst in Aurillac geboren und lebte in seiner Vaterstadt. Er kannte geologisch seine Gegend wie keiner vor ihm. Seine Arbeiten bilden die Grundlage für die monographische Bearbeitung der Geologie des Cantal durch Boule, der ebenfalls aus Aurillac stammt. Rames hat auch seit dem Jahre 1877 stets die Frage der tertiären Feuersteine im Auge behalten und sowohl 1878 wie auch 1889 auf den Ausstellungen in Paris Proben davon ausgelegt. In seiner Arbeit über die Geologie des Puy Courny bei Aurillac aus dem Jahre 1884[3]) vertritt er ebenfalls die Manufactnatur der Feuersteine, die er am Puy Courny, bei Veyrac und im Bois de la Condamine gefunden hatte. Seine Beobachtung, dass von dem verschiedenartigen Feuersteinmaterial, welches die oligocänen Schichten für die Herstellung von Werkzeugen lieferten, in der Miocänzeit nur bestimmte harte und zum Schlagen besonders geeignete Varietäten Verwendung gefunden haben, hat Boule[4]) später in sehr einfacher Weise dadurch erklärt, dass in der Miocänzeit die Erosion der Thäler nur diejenigen oligocänen Schichten freigelegt hatte, die dieses bestimmte Feuersteinmaterial enthalten, dass sie aber noch nicht tief genug vorgeschritten war, um auch anderes Material zu entblössen. Es stand also in Wirklichkeit während der Miocänzeit garkein anderes Material für die Herstellung von Werkzeugen zur Verfügung.

G. de Mortillet hat im Anschluss an seine schon 1873 geforderte Annahme eines tertiären „précurseur de l'homme“[5]) die tertiären Feuersteinwerkzeuge auf diesen „précurseur“ bezogen, dem er 1879 den Namen „Anthropopitheous“, dann aber, weil dieser Name schon vergeben war, den Namen „Homosimius“ gab, um damit seine intermediäre Stellung zwischen Menschen und Affen zum Ausdruck zu bringen. Mortillet glaubte sich sogar berechtigt, obwohl von diesem „Homosimius“ nur die Feuersteinwerkzeuge bekannt waren, bereits 3 Arten zu unterscheiden, den „Homosimius Bourgeoisii“ (von Thenay), den „Homosimius Ribeiroi“ (von Otta) und den „Homosimius Ramesii“

1) Roujou: „Silex taillé découvert en Auvergne dans le miocène supérieur par M. Charles Tardy“. In Matériaux pour l'hist. prim. et nat. de l'homme 1870.

2) Bull. de la soc. d'anthropol. de Paris 1869 pag. 703.

3) J.-B. Rames: „Géologie du Puy Courny. Eclats de silex tortoniens du Bassin d'Aurillac (Cantal)“. In Matériaux pour l'hist. prim. et nat. de l'homme 1884 pag. 385.

4) Revue d'anthropologie 1889 p. 217.

5) Gabriel de Mortillet: „Le Précurseur de l'homme“. In Compte rendu de l'Association française, Lyon, 1873.

(von Aurillac)[1]). Aus den Werkzeugen ferner glaubte er schliessen zu dürfen, dass dieser „Homosimius“ kleiner gewesen sei als der Mensch. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass diese Speculationen, soweit sie sich auf die Existenz tertiärer Feuersteinwerkzeuge stützen, vollkommen willkürlich sind, dass sie dagegen, soweit die rein theoretische Forderung einer Übergangsform zwischen Menschen und Affen in Betracht kommt, nichts neues enthalten, da schon Karl Vogt, Haeckel, Darwin und Huxley das gleiche Postulat aufgestellt haben. Was die Feuersteine vom Puy Courny betrifft, so hat Mortillet ein ihm von Rames geschenktes Exemplar abgebildet[2]), das in der That in deutlichster Weise die Charaktere zeigt, die wir als specifische Schlagerscheinungen kennen: „plan de frappe“, „conchoïde“ („bulbe de percussion“), „éraillure“, „ondulations“ etc.

Das Interesse für die Frage der tertiären Steinwerkzeuge, das die Funde des Abbe Bourgeois angeregt hatten, war inzwischen in Frankreich so gewachsen, dass man beschloss, die Tagung der „Association française“ im Jahre 1884 in Blois, der unmittelbaren Nähe des Fundortes der Feuersteine von Thenay abzuhalten, um die Frage der tertiären Manufacte an Ort und Stelle eingehend discutieren zu können. Das Ergebnis dieser Discussion, die auch die Feuersteine von Aurillac mit berührte, bestand darin, dass der Congress die Frage in suspenso liess, ob es sich bei den tertiären Feuersteinen wirklich um die Beeinflussung durch Menschenhand handelt. Chantre, der Präsident der Section für Anthropologie, fasste das Resultat der Debatte in dem Satz zusammen: „qu'au point de vue de l'âge des terrains, la question est incontestablement éclairée, on est bien en face d'un terrain tertiaire inférieur; quant à la question des silex la discussion reste encore ouverte“[3]). Auch Cartailhac hielt sich noch nachträglich verpflichtet, seine Ansicht im gleichen Sinne zu präcisieren: „En résumé, tous les faits remarqués à Thenay, à Puy Courny, à Otta s'expliquent aisément par l'action humaine. Certaines pierres de ces gisements offrent même les caractères convenus de la taille intentionnelle. Mais dans tous les cas, à mon avis, il n'y a pas une certitude suffisante; il n'est pas absolument établi qu'il faille écarter les causes purement naturelles. Les traces irrécusables de nos ancêtres tertiaires, sont encore à découvrir“[4]). Und ebenso spricht sich Nadaillac in seinem Buche über den tertiären Menschen aus: „Si un être, homme ou anthropoïde, a véritablement vécu, les preuves se multiplieront comme elles se sont multipliées pour l'homme quaternaire. Alors, mais seulement alors l'affir-

1) Revue d'anthropologie 15. Jan. 1879. Ferner „le Préhistorique“ III. Aufl. 1900.

2) G. de Mortillet: „Silex tertiaire taillé“. In l'Homme, Paris 1884, pag. 14, wie in „le Préhistorique“ III. Aufl. 1900, pag. 89. Mehrere Exemplare sind ferner abgebildet in Mortillet „Musée préhistorique“ II. Edition Planche IV, Paris 1903.

3) „L'Association française en congrès à Blois. Travaux de la section d'anthropologie“. In Matériaux pour l'hist. prim. et nat. de l'homme, 1884, pag. 496.

4) Matériaux pour l'hist. prim. et nat. de l'homme 1885, pag. 189.

mation ou la négation absolues seront possible. Jusque-là, il faut se garder de tout jugement hâtif" [1]).

Auch in der nächsten Zeit wurde die Discussion über die Frage der Manufactnatur der fraglichen Feuersteine noch fortgesetzt. Arcelin veröffentlichte 1885 eine Mittheilung [2]), in der er an der Hand von Feuersteinen, bei denen er die Einwirkung menschlicher Thätigkeit für ausgeschlossen hielt, den Nachweis zu führen suchte, dass alle typischen Charaktere der absichtlichen Bearbeitung des Feuersteins, wie „Cône de percussion" und „Retouchen" auch durch rein unbeabsichtigte und zufällige Naturfactoren ohne Dazuthun des Menschen oder eines menschenähnlichen Wesens zu stande kommen können. Er geriet durch diese Mittheilung in eine Debatte mit G. de Mortillet [3]), die auf der Tagung der Association française in Grenoble 1885 lebhaft fortgesetzt wurde [4]). Obwohl Arcelin an der Sitzung nicht persönlich theilnehmen konnte, hatte er doch 31 Feuersteine verschiedener Herkunft geschickt, die nach seiner Meinung die typischen Erscheinungen der absichtlichen Bearbeitung erkennen lassen sollten, trotzdem der Mensch zu ihrer Formgebung nicht beigetragen hatte. Indessen musste Chantre, der diese Steine vorlegte, selber erklären, „que les silex de M. Arcelin ne rappellent en aucune façon ceux de Thenay et du Puy Courny". Zu einer Einigung führte auch die Discussion auf dieser Tagung nicht. Es war vielleicht ein Fehler, dass die Feuersteine von Thenay und von Aurillac in den Erörterungen jener Zeit meistens zusammen geworfen wurden. Beide sind in Wirklichkeit ganz verschieden, und was für die eine Gruppe festgestellt wird, gilt deshalb durchaus noch nicht ohne weiteres auch für die andere.

In den folgenden Jahren trat eine gewisse Ermüdung und Stagnation ein in der Erörterung der tertiären Feuersteine, obwohl Rames mit den Herren Chibret und Grandvaux seine Nachforschungen an verschiedenen Punkten der Umgegend von Aurillac mit Erfolg fortsetzte, wobei er unter anderem zwei geschlagene Feuersteinstücke von vollkommen gleicher Gestalt fand, die selbst bis in die Einzelheiten, wie Dimensionen, Gewicht, Lage und Krümmung der Facetten etc. wie Zwillinge einander glichen [5]).

In neuerer Zeit haben verschiedene Forscher Aurillac besucht, um an Ort und Stelle die Frage zu studieren. Charles Puech, der wohl bei den meisten

1) Nadaillac: „l'Homme tertiaire". Paris 1885.

2) Adrien Arcelin: „Silex tertiaires". In Matériaux pour l'hist. prim. et nat. de l'homme 1885, pag. 193.

3) G. de Mortillet: „Silex tertiaires intentionnellement taillés". In Mat. pour l'hist. prim. et nat. de l'homme 1885, pag. 252. — Ferner Sitzung der Société d'anthropologie de Paris 5. März 1885, siehe Matériaux etc. 1885, pag. 283. — Ferner Arcelin: „Silex tertiaires". In Mat. p. l'hist. etc. 1885, pag. 303.

4) „L'Association française en congrès à Grenoble. Travaux de la section d'Anthropologie". In Mat. pour l'hist. prim. et nat. de l'homme 1885, pag. 385.

5) „Silex tertiaires des environs d'Aurillac". In l'Homme 1885, pag. 664 sowie in Mat. p. l'hist. etc. 1886, pag. 60.

dieser Besuche die Honneurs seiner Heimatstadt gemacht hat, berichtet darüber in einer kleinen Schrift[1]). Von den Besuchern haben sich GIROD und MASSÉNAT durchaus ablehnend gegen die Annahme einer Manufactnatur verhalten. ADRIEN de MORTILLET hat sich ganz auf den Standpunkt seines Vaters gestellt. BOULE, der aus Aurillac gebürtig die eingehendste Kenntnis seines Heimathlandes in geologischer Hinsicht besitzt und ausser der Aufnahme des Blattes Aurillac der geologischen Karte von Frankreich auch einige monographische Arbeiten über die Geologie des Cantal publiciert hat, verwirft vollkommen die Ansicht von der Manufactnatur der tertiären Feuersteine, und hat seiner gegentheiligen Auffassung bei verschiedenen Gelegenheiten Ausdruck gegeben[2]). Auf dem geologischen Ausflug des internationalen Congresses von Paris im Jahre 1900 führte BOULE wie PUECH berichtet, die Mitglieder auch nach dem Puy Courny, zeigte ihnen an einer freigelegten Stelle die miocäne Schicht und fragte sie nach ihrer Meinung über die Feuersteine, worauf der Präsident der Londoner Geologischen Gesellschaft WHITTACKER und Prof. ARMSTRONG lachend erwiderten, dass man auch in England solche Theorien über tertiäre Feuersteinmanufacte geäussert hätte, aber ohne Erfolg. Damit war die Sache wieder einmal sehr einfach erledigt.

Inzwischen haben in den letzten Jahren CAPITAN und bald darauf KLAATSCH wiederholt Ausgrabungen bei Aurillac gemacht. CAPITAN, der vorher nichts von der Manufactnatur der „Eolithen“ wissen wollte, hat sich nach einem Besuch bei RUTOT vollkommen von ihr überzeugt, und erkennt heute rückhaltlos die Manufactnatur der tertiären Feuersteine von Aurillac an, während er an den Feuersteinen von Thenay keine absichtliche Einwirkung feststellen konnte. Eine Publication von CAPITAN über seine Ausgrabungen bei Aurillac ist noch nicht erfolgt. Dagegen hat KLAATSCH bereits zwei Mittheilungen mit einigen Abbildungen veröffentlicht. Seine ersten kurzen Bemerkungen[3]) gaben den Anlass zu der Discussion in der anthropologischen Gesellschaft zu Berlin. Seine zweite Mittheilung[4]) ist soeben erst erschienen. KLAATSCH tritt namentlich in seiner zweiten Arbeit ohne Bedenken für die Manufactnatur der tertiären Feuersteine vom Puy Courny und Puy de Boudieu bei Aurillac ein.

Schliesslich hat auch RUTOT, dem wir die Anregung zu unseren heutigen Vorstellungen über die primitiven Culturen verdanken, in seinem letzten zusammenfassenden Buch[5]) dem „Gisement du Puy Courny“, von dem er durch MARTY und PUECH eine Reihe von Probestücken erhielt, eine eingehende Besprechung und einige Abbildungen gewidmet, in denen er bereits mehrere Typen von pri-

1) CHARLES PUECH: „Le problème de l'origine de l'homme. Les Silex tortoniens du Bassin d'Aurillac“. Aurillac 1902.

2) Revue d'Anthropologie 1889. — Le Cantal miocène 1896.

3) H. KLAATSCH: „Anthropologische und palaeolithische Ergebnisse einer Studienreise durch Deutschland, Belgien und Frankreich“. In Zeitschr. f. Ethnol. 35. Jahrg. 1903. — Ferner Ebenda pag. 488.

4) H. KLAATSCH: „Die tertiären Silexartefacte aus den subvulkanischen Sanden des Cantal“. In Arch. f. Anthropologie N. F. Bd. III, 1905.

5) RUTOT: „Le préhistorique dans l'Europe centrale“. Namur 1904.

mitiven Werkzeugen wie „percuteurs“, „retouchoirs“, „racloirs“, „grattoirs“ etc. unterscheidet und zur Darstellung bringt.

Eine Publication von PUECH, der selbst mehrfache Ausgrabungen in der Nähe von Aurillac unternommen hat und einige sehr charakteristische Stücke in seiner Sammlung besitzt, ist in Vorbereitung.

Die geologischen Verhältnisse.

Es kann hier nicht meine Aufgabe sein, eine umfassende Schilderung der Geologie des Cantal zu geben. Eine solche ist bereits in eingehender Weise von berufenen Fachmännern geliefert worden. Ich kann mich hier darauf beschränken, diejenigen Verhältnisse kurz zu erörtern, welche für die Bestimmung des geologischen Alters der Schicht in Betracht kommen, aus der die Feuersteinmanufacte stammen.

Die Grundlage für die Kenntniss der Geologie des Cantal haben die Arbeiten von RAMES[1]) gelegt. Auf dieser Basis hat dann hauptsächlich sein Schüler BOULE[2]) die heutigen Erfahrungen über die geologischen Verhältnisse jener Gegend auf- und immer mehr ausbauen können. Weitere Beiträge zur Geologie des Cantal, die besonders für die Erforschung der tertiären Flora verschiedener Horizonte von grosser Wichtigkeit waren, lieferte PIERRE MARTY[3]) und LAURENT[4]). Im Jahre 1900 unternahm der internationale Geologen-Congress unter Führung von MICHEL LÉVY und BOULE eine Excursion nach der Auvergne, über deren Ergebniss CHARLES PUECH[5]) ausführlich berichtet.

Diese und zahlreiche speciellere Untersuchungen haben folgende Tatsachen ergeben. Die alte Grundlage der Ablagerungen im Cantal bilden Gneisse und Glimmerschiefer, über denen noch Schichten der Kohlenformation lagern. Dann fehlen alle späteren Formationen bis zum Tertiär. Die tertiären Schichten beginnen mit oligocänen Süsswasser- und Brackwasserablagerungen des Sannoisien, Tongrien und Aquitanien, die zahllose Süsswasser- und Land-Schnecken einschliessen und die durchzogen werden von Feuersteinbänken. Dieser oligocäne

1) J. B. RAMES: „Géogénie du Cantal.“ Aurillac 1873. — Derselbe: „Géologie du Puy Courny.“ In Matériaux pour l'hist. prim. et nat. de l'homme 1884.

2) M. BOULE: „Le Cantal miocène.“ In Bulletin des services de la carte géologique de la France Nr. 54, Tome VIII, 1896—1897. — Derselbe: „Géologie des environs d'Aurillac,“ ibid. Nr. 76 Tome XI, 1899—1900.

3) PIERRE MARTY: „Flore miocène de Joursac (Cantal).“ Paris 1903. — Derselbe: „Végétaux fossiles des cinérites pliocènes de Las Clausades (Cantal).“ In Revue de la Haute-Auvergne, Aurillac 1905.

4) LAURENT: „Flora pliocène des cinérites du Pas-de-la-Mougudo, avec une introduction par P. MARTY.“ In Annales du Muséum d'histoire naturelle de Marseille Tome IX, 1904—1905.

5) CHARLES PUECH: „Le Congrès géologique international en Auvergne.“ In Revue de la Haute-Auvergne, Aurillac 1901.

Süsswasser-Feuerstein lieferte das Material für die in den darüber liegenden Schichten auftretenden Manufacte.

Unmittelbar über den oligocänen Schichten finden sich nämlich die von den französischen Geologen dem obersten Miocän, von den Deutschen Geologen dem untersten Pliocän zugerechneten fluviatilen Sande und Gerölle und lacustren Kalktuffe des Pontien mit ihrer charakteristischen Fauna von D i n o t h e r i u m g i g a n t e u m, M a s t o d o n l o n g i r o s t r i s, R h i n o c e r o s S c h l e i e r m a c h e r i, H i p p a r i o n g r a c i l e, T r a g o c e r u s a m a l t h e u s, G a z e l l a d e p e r d i t a und C e r v u s sp., sowie einer sehr reich entwickelten Flora. Es ist natürlich völlig indifferent, ob man diese Schichten noch dem Miocän oder dem Pliocän zuweist. Das ist eine rein conventionelle Sache, da ja die geologischen Formationen nicht durch scharfe Grenzen von einander getrennt sind, sondern in einander übergehen. Es ist also gleichgültig, wo wir den Strich machen wollen. Der Horizont ist ja genau und scharf charakterisiert durch seine Fauna und Flora. Um aber einen bestimmten Ausdruck für die Schichten zu haben, schliesse ich mich dem Gebrauch der französischen Geologen an, die diese Verhältnisse des Cantal erforscht haben und bezeichne die betreffenden Schichten im Folgenden als oberstes Miocän.

In diese Zeit fallen die ersten mächtigen Ausbrüche der Cantalkratere. Die von den Vulkanen in die Thäler herabfliessenden Basalt-, Trachyt- und Labradoritmassen, Aschenregen und Schlammströme erscheinen daher theils unter, theils überlagert von den miocänen Schichten, zum Theil sind die miocänen Schichten direkt von ihnen aufgewühlt und eingeschlossen. Der nebenstehende



Fig. 2. Profil nach BOULE.

Olig. Oligocène; M³. Alluvions du Miocène supérieur; βm basalte miocène; α conglomérat andésitique; a¹ alluvions quaternaires; gl. moraines quaternaires.

Querschnitt durch das Thal der Jordanne bei Aurillac zeigt z. B. am Puy Courny miocäne Sande ü b e r, am Rocher des Pendus und bei Vergnols u n t e r dem miocänen Basaltstrom. Am Puy de Boudieu liegen die miocänen Sande in Form von einzelnen grossen Linsen im andesitischen Tuff. Hier sind sie direkt vom vulcanischen Schlamm überfluthet, aufgewühlt und eingeschlossen worden. Sie haben sich zum Theil ganz mit den sie überflutenden Schlammströmen vermischt, so dass ihr Material direkt im Schlammtuff eingebettet zu finden ist, wie das ja geschehen musste, als sich die Schlammströme in die miocänen Flussthäler ergossen.

In diesen miocänen Schichten, speciell in den fluviatilen Sand- und Geröll-

massen finden sich nun an den verschiedensten Stellen der Umgebung von Aurillac die vielbesprochenen Feuersteinmanufacte. Sie liegen hier vermischt mit Feuersteinen die nicht bearbeitet sind und die offenbar das Rohmaterial für die Bearbeitung lieferten. Der Procentsatz von bearbeiteten Stücken ist an

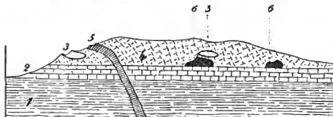


Fig 3. Profilschnitt durch den Puy de Boudieu. Nach einer Skizze von Pierre Marty.
1: argile rouge sannoisienne. — 2: marnes calcaires et bancs de silex stampiens (Limnaea pachygaster, Planorbis cornu). — 3: Sables quartzeux pontiens à Eolithes, englobés dans le conglomérat andésitique. — 4: Conglomérat andésitique pontien. — 5: Basalte plaisancien. — 6: Brèche andésitique en placage.

verschiedenen Stellen verschieden gross. Es ist bis zu einem gewissen Grade vom Zufall abhängig, ob man an einer Stelle grade viel Manufacte findet oder nicht. Ich habe speciell am Puy de Boudieu, wo ich das Glück hatte, auf eine besonders ergiebige Stelle zu stossen, auch die Beobachtung gemacht, dass die bearbeiteten Stücke häufig zu mehreren, 5, 10, 15 Exemplaren ziemlich nahe an einander liegen, nur durch geringe Tuff- oder Kiesmassen von einander getrennt, während wieder auf 50—80 zm im Umkreis eines solchen Nestes keine oder nur vereinzelte Stücke vorkommen. Was ihr Aeusseres betrifft, so erscheinen die unbearbeiteten Stücke meist rundlich abgerollt. Die bearbeiteten dagegen zeigen meist nur wenig oder gar keine Spuren der Abrollung. Der Grad der Kantenabrollung bei den bearbeiteten Stücken ist aber an verschiedenen Fundstellen ein sehr verschiedener. So habe ich z. Th. an Puy Courny und bei Belbex ganz vorwiegend Stücke gefunden, deren Kanten sehr deutliche Spuren der Abrollung zeigten, während ich am Puy de Boudieu fast ausschliesslich vollkommen scharfkantige Stücke ausgrub, die z. B. so scharf waren, als wären sie eben erst geschlagen. Demgegenüber sind alle Quarzgerölle die mit den miocänen Feuersteinen zusammen vorkommen, fast völlig rund gerollt. Da es wie bereits Lissauer[1]) bei der Discussion vom 21. März 1903 in der Berliner anthropologischen Gesellschaft mit Recht betont hat, sehr wichtig ist, den Procentsatz der bearbeiteten und der nicht bearbeiteten Stücke zu kennen, so habe ich bei meinen Ausgrabungen an den verschiedenen Fundstellen sämmtliche Feuersteine gezählt. Dabei hat sich ergeben, dass

1) Zeitschrift für Ethnologie Bd. 35, Jahrg. 1903, pag. 487.

am Puy de Boudieu	von rund	425	Feuersteinen	ca. 148	d. h. ca.	30%
„ Puy Courny	„ „	120	„	„ 24	„ „	20 „
bei Veyrac	„ „	75	„	„ 11	„ „	15 „
„ Belbex	„ „	200	„	„ 16	„ „	8 „

sichere Merkmale der Bearbeitung zeigten. Indessen dürften sich aber diese Procentsätze in Wirklichkeit noch ganz bedeutend zu Gunsten der bearbeiteten Stücke verschieben. Wenn ich nämlich den Procentsatz an sicher nicht bearbeiteten Stücken feststelle, wie er sich mir an der Hauptausgrabungsstelle am Puy de Boudieu ergeben hat, so ist er ein auffallend geringer: etwa 15—20%. Die übrigen 50—55% sind derart, dass ich nicht mit Sicherheit sagen kann, ob sie bearbeitet sind oder nicht. Das muss bei der Beurtheilung mit berücksichtigt werden. Ferner habe ich vermuthlich manche Steine, die auf den ersten Blick nicht bearbeitet erschienen, weggeworfen, während sie doch vielleicht bei genauerer Betrachtung Spuren der Bearbeitung hätten erkennen lassen, denn ich muss gestehen, dass ich in mehreren Fällen Spuren der Bearbeitung an einzelnen Stellen eines Steins erst nachträglich bei wiederholtem Ansehen erkannt habe.

Ueber dem Miocän mit seinen Süsswasserbildungen und Eruptivmassen liegen die Schichten des unteren (Plaisancien), mittleren (Astien) und oberen (Sicilien) Pliocän, die wiederum wie z. B. bei Ceyssac (Haute Loire), bei Varenne am Saut de la Pucelle (Puy de Dôme), bei Mougudo, bei Saint Vincent (Cantal) durch ganz spezifische auf einander folgende Floren und auch durch pliocäne Faunen, wie die des Elephas meridionalis und des Mastodon arvernensis charakterisiert sind. Auch während der Pliocänzeit haben gewaltige Eruptionen von Andesit, Phonolith- und Basaltmassen stattgefunden, die sich immer mehr centralisierten am grossen Krater des Cantal, dem Puy de Griou. Sie liegen oben auf den Höhen über den miocänen Tuffmassen, die an einzelnen Stellen unmerklich in die mächtigen pliocänen mit Süsswasserschichten wechselnden Tuffablagerungen übergehen, und bilden die grossen Andesit- und Basaltdecken der Plateaux.

Gegen Ende der Pliocänzeit ist die vulcanische Thätigkeit im Cantal erloschen. Die erkalteten Vulcane des Hochlandes werden Ausgangspunkte für die Bildung und Ausbreitung von Gletschern, die sich weithin erstrecken und dem Lande während der Diluvialzeit durch ihre Vertiefung der Flussthäler sowie durch ihre Anhäufung von Moränen seine heutige Oberfläche geben. Man kann hier zwei Eiszeiten sehr scharf unterscheiden, die ältere z. B. auf der Ebene von Arpajon nahe bei Aurillac, in der die obere Diluvialterrasse („glaciaire des plateaux") abgelagert wurde, und die jüngere, in der die „terrasse inférieure" („glaciaire du fond des vallées") entstand. Beide sind getrennt durch eine Zwischeneisschicht. In der oberen Terrasse scheinen primitive diluviale Feuersteinwerkzeuge vorzukommen. Aus der unteren Terrasse besitzt Herr Puech eine grosse Sammlung von palaeolithischen Coups de poing und Moustierspitzen. In der recenten Oberflächenschicht schliesslich erscheinen neolithische Werkzeuge.

Schéma géologique du Cantal

par Pierre Marty.

Ère	Période	Étage	Industrie	Formations géologiques	Fossiles
Actuelle			Âge des métaux. Néolithique	Tufs calcaires Tourbe Limon	
Quaternaire			Tarandien (silex taillés)	Remplissage de la grotte du Cheylar, près Murat	Cervus tarandus
			Chelléen et Strépyien? (amygdales et éolithes)	Alluvions postglaciaires Moraines du fond des vallées	
			Mesvinien? Reutelien? (Eolithes)	Sables interglaciaires du fond des vallées	
Tertiaire	Pliocène	Sicilien		Glaciaire des plateaux. Basalte des plateaux	Hippopotamus (major?)
		Astien		Augit-andésites Phonolithes	
		Plaisancien		Conglomérat andésitique avec cinérites à empreintes végétales et coulées interstratifiées d'andésite et de basalte	Flores fossiles de Capels, Las Clausades, Niac, la Mougudo, St. Vincent etc.
	Miocène	Pontien	Eolithes miocènes du Cantal	Conglomérat andésitique. Argiles à Diatomées, Labradorites, Trachytes, Phonolithes, Basaltes, Sables quartzeux du Puy Courny et du Puy de Boudieu	Flore fossile de Joursac. Faune de Joursac et du Puy Courny à Hipparion gracile, Dinotherium gigantaum, Mastodon longirostris, Rhinoceros Schleiermacheri etc.
	Oligocène	Aquitanien		Calcaire et bancs de silex (formations d'eau douce)	Helix Ramondi, Planorbis cornu, Limnaea pachygaster
		Stampien		Marnes blanches, bancs de silex argiles vertes (formations d'eau saumâtre)	Limnaea pachygaster, Planorbis cornu, Potamides Lamarckii, etc.
		Sannoisien		Argiles rouges, sables quartzeux avec galets de silex arkoses (formation d'eau douce)	Entelodon, Acerotherium Gaudryi etc.
Primaire	Carbonifère			Houille, grès, conglomérat, orthophyres	Flore fossile de Champagnac
Primitive				Gneiss, micaschiste, talcschiste, granite granulite, microgranulite, porphyrite, etc.	

Die nebenstehende Tabelle, für deren liebenswürdige Zusammenstellung ich Herrn PIERRE MARTY zu grossem Danke verpflichtet bin, veranschaulicht am besten das relative Alter der einzelnen Schichten und giebt einen vorzüglichen Ueberblick über die geologischen Verhältnisse des Cantal, wie er dem Stande der heutigen Erfahrungen entspricht.

Die Feststellung tertiärer Spuren des Menschen ist für unsere ganzen Anschauungen über die Vorgeschichte des Menschen in mehr als einer Beziehung von so grosser Bedeutung, dass sie gegen allen Zweifel gesichert werden muss. Es scheinen mir im vorliegenden Falle aber nur zwei Arten von Einwänden denkbar zu sein. Entweder man bezweifelt das geologische Alter der in Rede stehenden Feuersteine oder man zieht ihre Manufactnatur in Frage. Ich möchte daher die Besprechung der geologischen Verhältnisse nicht abbrechen, ohne vorher noch einmal die ganz einwandsfreie Bestimmung des Alters der Feuersteinmanufacte betont zu haben. Ich habe schon gesagt, dass ich selber anfangs, als ich mich gegen die Manufactnatur der Feuersteine nicht mehr verschliessen konnte, gegen ihre Altersbestimmung Einwände zu machen suchte. Indessen es war mir nicht schwer, diese Einwände zu widerlegen. Auch KEILHACK und NOETLING[1]) haben bei der Discussion über die von KLAATSCH gesammelten Feuersteine von Aurillac in der Sitzung der anthropologischen Gesellschaft zu Berlin Bedenken über das tertiäre Alter der Feuersteine geäussert. NOETLING, der die Manufactnatur selbst nicht bezweifelt, gesteht zwar, dass er die Fundorte nicht aus eigener Anschauung kennt, aber KEILHACK macht eine derartige Angabe nicht. Dennoch möchte ich vermuthen, dass auch KEILHACK die geologischen Verhältnisse nicht an Ort und Stelle untersucht hat, denn sonst hätte er sich als Geologe wohl leicht seiner Bedenken entledigen können. In der That ist in Bezug auf das Alter der Feuersteine niemals von den Geologen, die den Ort besucht haben, der geringste Zweifel geäussert worden. Alle haben immer die Altersbestimmung bestätigt und mir ist auch nicht bekannt, dass ausser KEILHACK und NOETLING überhaupt irgend Jemand einen Zweifel daran geäussert hätte. Die geologischen Verhältnisse des Cantal sind so oft, so eingehend und so umfassend untersucht worden, dass sie seit längerer Zeit schon in allen wesentlichen Zügen vollkommen aufgeklärt sind. NOETLING weiss das offenbar nicht, denn er fordert, ohne seine Bedenken zu begründen, „dass das tertiäre Alter der Artefacte führenden Schichten von Puy Courny erst noch mit Sicherheit zu erweisen ist.“ KEILHACK dagegen begründet seine Bedenken, indem er sagt: „Der Vulkanismus hat in Mitteleuropa, z. B. in der Eifel, noch bis in die Lösszeit hineingespielt; am Laacher See finden wir Löss abwechselnd mit Bimstein. Daher ist es durchaus nicht ausgeschlossen, dass der Vulkanismus in diesen Theilen Frankreichs ebenfalls bis in die Zeit des späteren Diluviums hinein angedauert hat, so dass also die Ueberlagerung durch eine Lavadecke für die Sicherstellung des tertiären Alters in keiner Weise ausreicht“. Dann wird angeführt das Zusammenvorkommen

1) Zeitschr. f. Ethnologie Bd. 36, Jahrg. 1904, pag. 301.

der bearbeiteten Feuersteine mit einer miocänen oder altpliocänen Fauna. Das wird in den meisten Fällen wohl ein genügendes Kriterium sein, aber nicht, wo es sich wie hier um eine Sache von so enormer Wichtigkeit handelt; da muss man sicherere Kriterien haben. Denn da die tertiären Säugethierreste sich in einer vom Wasser abgelagerten Schicht finden, so ist von vornherein die Möglichkeit nicht wegzuleugnen, dass sie sich auf sekundärer Lagerstätte befinden und dass sie aus ihrer primären, thatsächlich tertiären Lagerstätte in einer späteren Zeit hinweggeführt und an ihrer jetzigen Stelle wieder abgelagert worden sind."

Diese beiden Bedenken KEILHACKS möchte ich kurz beseitigen.

Was zunächst die Möglichkeit betrifft, dass die Eruptionen bis in die späte Diluvialzeit fortgedauert haben könnten und dass daher die unter dem Basalt liegenden Schichten mit Feuersteinmanufacten diluvial sein könnten, so ist dieselbe einfach dadurch ausgeschlossen, dass die beiden durch ihre Fauna und ihre Manufacte gut charakterisierten Diluvialterrassen der Umgegend von Aurillac nirgends von vulkanischen Massen überdeckt sind. Es haben also zur Diluvialzeit keine Eruptionen mehr stattgefunden. Die unter den vulkanischen Ablagerungen liegenden Schichten sind daher älter als das Diluvium. Ferner beweist die Thatsache, dass wir mehrere durch Süsswasserschichten mit scharf charakterisierten Floren von einander getrennte Basalt- und Andesit-Eruptionen unterscheiden können, einwandsfrei, dass die Schichten mit den bekannten Feuersteinmanufacten, die theils unter, theils unmittelbar über dem tiefsten Basalt gelegen sind, nicht dem spätesten Tertiär angehören können. Auch der Umstand, dass diese Manufactschichten nur an den Rändern der vulkanischen Decke, da wo Flussthäler dieselbe angeschnitten haben, in einer bestimmten Höhenlage frei liegen, während sie auf den Plateaux, wo das nicht der Fall ist, und wo die jüngeren Eruptionsmassen sich ausgebreitet haben, von letzteren bedeckt sind, beweist ihr höheres tertiäres Alter. Sodann finden wir diese Manufactschichten immer unmittelbar über dem Oligocän oder auf dem das Oligocän unmittelbar bedeckenden Basalt der ältesten Eruption. Da aber über diesen ältesten Eruptionsmassen noch Schichten angetroffen werden, die z. B. bei Joursac eine typische spätmiocäne Flora mit der charakteristischen Fauna des Hipparion, Dinotherium, etc. vereint enthalten, so können diese manufactführenden Schichten nicht jünger sein, als das obere Miocän, und damit fällt auch der zweite Einwand KEILHACKS, dass die in den Manufactschichten gefundenen Knochen der genannten Fauna erst secundär eingeschwemmt sein könnten, von selbst hinweg. Die Verhältnisse sind in der That so klar, wie nur irgend möglich und ich kann nur jedem, der noch Bedenken hegt, vorschlagen, selbst hinzugehen und mit eigenen Augen zu sehen.

Nach alledem ist die Thatsache, dass die Feuersteinmanufacte aus der gleichen Zeit stammen, wie die Knochenreste der fossilen Fauna, welche sie begleiten, d. h. aus dem Ende der Miocänzeit, gegen jeden Zweifel gesichert. Will man also noch Zweifel an der Existenz eines menschenähnlichen Wesens

in der Miocänzeit äussern, so können sie sich nur auf die Manufactnatur der Feuersteine beziehen. Das Folgende mag über die Berechtigung solcher Zweifel entscheiden.

Die Kriterien der Manufactnatur.

Es ist bekanntlich viel darüber gestritten worden, was man als Merkmal absichtlicher Bearbeitung des Feuersteins ansehen soll. Die Archive und Zeitschriften der praehistorischen Archaeologie sind zeitweilig angefüllt gewesen mit Discussionen über diesen Gegenstand. Man ist bemüht gewesen, ein charakteristisches Zeichen zu finden, an dem man stets den absichtlich bearbeiteten vom zufällig durch anorganische Factoren beeinflussten Feuerstein unterscheiden könnte. In der That wäre ein solches Merkmal von der grössten Bedeutung, denn es würde alle Zweifel darüber, ob ein Feuerstein Manufact ist oder nicht, ohne weiteres beseitigen. Indessen das Resultat aller Discussionen ist nicht sehr befriedigend gewesen, jedenfalls nicht so, dass es die Zweifel zu beseitigen vermöchte. Ich will daher im Folgenden zunächst den Standpunkt praecisieren, den ich in dieser Frage einnehme. Dabei werde ich mich hinsichtlich der Ausdrücke für die Schlagerscheinungen am Feuerstein mit einigen Modificationen im wesentlichen an die Terminologie halten, die SCHWEINFURTH [1]) in seinen Studien über die aegyptischen Eolithen vorgeschlagen hat.

Zwei Reihen von Erscheinungen sind es hauptsächlich, die man als Zeichen absichtlicher Bearbeitung des Feuersteins angesprochen hat: Einerseits die Schlagerscheinungen, die am abgeschlagenen Stück (éclat) sowohl wie an dem Kernstein (nucleus), von dem es abgesprungen ist, zu sehen sind, andrerseits die Reihen von einseitig gerichteten Schlagmarken (retouches) an den Kanten von Feuersteinstücken.

Die Schlagerscheinungen am abgeschlagenen Stück sind bereits von MORTILLET [2]) als Merkmale **absichtlicher Spaltung** (taille intentionnelle) des Feuersteins gewürdigt worden und zwar hat MORTILLET bekanntlich das Zusammenvorkommen von drei typischen Schlagerscheinungen als untrügliches Zeichen absichtlicher Spaltung hingestellt. Diese drei Schlagerscheinungen sind folgende. Am abgeschlagenen Stück, das ich kurz als „**Abschlag**“ (éclat) bezeichnen möchte und das in verschiedenen Formen als **Spahn** oder als **Scheibe** erscheinen kann, nimmt man wahr: die **Schlagfläche** (plan de frappe), die **Schlagbeule** (conchoïde de percussion, auch vielfach bulbe de percussion genannt) und

---

1) G. SCHWEINFURTH: „Steinzeitliche Forschungen in Oberägypten.“ — In Zeitschr. f. Ethnologie Bd. 36, Jahrg. 1904.

2) G. et A. de MORTILLET: „Le préhistorique origine et antiquité de l'homme.“ III Ed. Paris 1900.

die Narbe (esquillement de percussion) (Fig. 4). Die letztere ist übrigens durchaus nicht eine durch das Vorbeifahren des Behausteins hervorgebrachte Absplitterung[1]), sondern eine direkte Prellerscheinung. Wo diese drei Momente an demselben Abschlag zusammen vorkommen, meint MORTILLET, da ist jeder Zweifel an der absichtlichen Spaltung des Feuersteins ausgeschlossen. Es

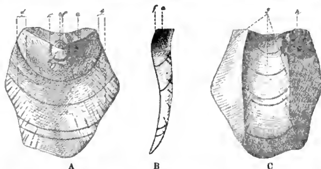


Fig. 4. Schema eines Abschlags. A von vorn, B von der Seite, C von hinten. a Schlagfläche mit Treffpunkt und Kegelsprüngen b, f Schlagbeule, c Schlagnarbe, d Wellenringe, e Strahlensprünge, h Splitterbrüche, g Schlagmarken.

giebt indessen sogar eine noch grössere Zahl von typischen Schlagsymptomen. Wer selbst Feuerstein bearbeitet und Abschläge untersucht hat, kennt z. B. die Wellenringe, die sich mehr oder weniger deutlich auf der Sprungfläche oder Vorderseite des Abschlags finden. Da ihre Concavität stets dem Treffpunkt zugekehrt ist, so geben sie eins der besten Kriterien für die Feststellung der Richtung, in welcher der Schlag erfolgte, das besonders in den Fällen von grösstem Werte ist, wo der obere Theil des Abschlags mit der Schlagfläche und Schlagbeule abgebrochen ist oder wo es sich um die Reste von Schlagmarken auf der Rückseite des Abschlages oder am Nucleus handelt. Der Grad der Ausprägung dieser Wellenringe hängt von verschiedenen Faktoren ab, unter anderem von der Intensität des Schlages. Wo diese gering oder durch weiche Krusten an der Schlagfläche gedämpft ist, können die Wellenringe so schwach sein, dass sie kaum zu erkennen sind. Sodann hat HAHNE[2]) bereits auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht, die in kegelförmig vom Treffpunkt des Schlages ausstrahlenden Sprüngen besteht und die man als das Phaenomen der Kegelsprünge bezeichnen kann. Namentlich bei etwas durchsichtigem Feuerstein sind diese Kegelsprünge, die durch Abspringen der äusseren Partieen bisweilen zur Isolierung eines deutlichen Schlagkegels führen, häufig besonders gut

1) SCHWEINFURTH: „Steinzeitliche Forschungen in Oberaegypten." In Zeitschr. f. Ethnologie Bd. 36, Jahrg. 1904, pag. 775.

2) Vergl. Zeitschr. f. Ethnologie Bd. 36, Jahrg. 1904, pag. 776 u. 825.

zu sehen. In engster Beziehung zu diesen Kegelsprüngen und den Wellenringen steht ferner eine Schlagerscheinung, die merkwürdiger Weise bisher garnicht beachtet zu sein scheint. Es sind dies auf der Vorderseite des Abschlags vorhandene Curven von kurzen Rissen oder Sprüngen, die radial vom Treffpunkt ausstrahlen und stets genau senkrecht zur Richtung der Wellenringe verlaufen. Diese Strahlensprünge, wie ich sie nennen möchte, sind je nach dem Material mehr oder weniger deutlich entwickelt, am deutlichsten stets an den Seiten der Sprungfläche, und fehlen oft ganz auf der Höhe der Schlagbeule. Weiterhin hat die Krümmung der Sprungfläche bisher zu wenig als Schlagerscheinung Berücksichtigung gefunden. Die Sprungfläche ist niemals eine Ebene. Sie zeigt am Abschlag stets zwei Krümmungen, eine convexe, die auf der Schlagbeule ihre Höhe hat, und eine concave, die sich nach abwärts hin anschliesst und am unteren Rande am stärksten wird. Bei breiten scheibenförmigen Abschlägen ist diese Concavität auch nach den Seitenrändern hin entwickelt. Sie bildet gewissermassen eine flache Delle, welche die hügelförmige Schlagbeule auf der Sprungfläche als seichte Vertiefung umgiebt. Treffpunkt, Kegelsprünge, Strahlensprünge, Wellenringe und Krümmung der Sprungfläche stehen in einem mathematisch bestimmbaren Abhängigkeitsverhältniss von einander. Das scheint mir besonders wichtig für eine physikalische Analyse der Schlagerscheinungen, die leider von mineralogischer Seite bisher noch nicht gegeben worden ist. Schliesslich möchte ich noch auf die Schlagerscheinung der Splitterbrüche hinweisen, die bisweilen auf dem oberen Ende des Abschlags zu sehen sind, wenn derselbe nicht beim ersten Schlage abgesprungen ist, sondern erst nach mehrfachem Aufschlagen des Hausteins. Von der Schlagbeule, den Strahlensprüngen, den Wellenringen und der Krümmung der Sprungfläche finden sich die Negative auch an der Schlagmarke des Nucleus.

Nach alledem könnte es scheinen, als ob sich zu den Mortillet'schen Kriterien der absichtlichen Spaltung des Feuersteins noch eine ganze Anzahl neuer Symptome gesellten, welche die Entscheidung über die Manufactnatur noch wesentlich erleichterten und sicherten. Dem ist aber keineswegs so. Alle hier angeführten Schlagerscheinungen sind nur Symptome einer und derselben Einwirkung und wenn sich ihre Zahl selbst noch verhundertfachen liesse, so würde damit die Entscheidung darüber, ob absichtliche Spaltung des Feuersteins vorliegt oder nicht, doch nicht im geringsten Maasse sicherer werden als wenn nur eins oder wenige dieser Symptome vorhanden wären. Diese sämmtlichen Erscheinungen sind nur Ausdruck der Einwirkung eines Druckes und entstehen mehr oder weniger deutlich immer, wenn irgend ein Druck, Stoss oder Schlag mit genügender Kraft annähernd punktförmig auf eine Feuersteinfläche gerichtet ist. Sie sagen also nicht das Geringste aus über die Art der den Druck hervorbringenden Faktoren. Wenn daher die Möglichkeit besteht, dass in der Natur auch durch anorganische Faktoren solche punktförmig einwirkenden Druckkräfte hervorgebracht werden können, dann sind die sämmtlichen Schlagerscheinungen als Kriterien für die absichtliche Spaltung des Feuersteins gänzlich unzuverlässig.

Über diese Möglichkeit lässt sich streiten. Dass die durch Wechsel von extremen Temperaturen, von Feuchtigkeit und Trockenheit, vor allem durch Frost entstehende Zerspaltung des Feuersteins niemals die oben geschilderten Symptome hervorbringt, ist heute wohl allgemein anerkannt. Anders steht es schon mit der Frage, ob stark bewegtes Wasser, z. B. in plötzlich anschwellenden Gebirgsbächen, bei Wasserfällen, am Meeresstrande nicht gelegentlich Steine so gegeneinander werfen kann, dass sie mit den typischen Schlagerscheinungen zerspringen. Mir scheint eine solche Möglichkeit nicht ganz ausgeschlossen zu sein, wenn ich auch vermuthe, dass derartige Fälle, wenn sie wirklich vorkommen, immerhin zu den Seltenheiten gehören werden. Ebenso könnte ich mir denken, dass durch Herabfallen schwerer Steine und Geröllmassen, etwa an Abhängen, an denen die Erosion arbeitet, gelegentlich Feuersteine unter den typischen Druckerscheinungen zerschlagen werden. Immerhin wird auch dieser Fall nicht eben häufig sein. Schliesslich erscheint mir auch die Möglichkeit gegeben, dass die Bewegungen der Gletscher Steine derartig gegeneinander pressen, dass sie unter Entwicklung der characteristischen Drucksymptome zerspringen. Kurz, die Möglichkeit, dass rein anorganische Factoren an Feuersteinen die oben genannten Druckerscheinungen hervorbringen können, möchte ich nicht ohne weiteres bestreiten. Dann aber sind Schlagbeulen, Schlagnarben, Schlagflächen, Wellenringe, Kegelsprünge etc. an sich entgegen der Ansicht Mortillet's keine einwandsfreien Kriterien absichtlicher Spaltung.

Nicht eben viel besser steht es mit dem zweiten Kriterium der absichtlichen Feuersteinbearbeitung, das erst in neuerer Zeit seit der Beschäftigung mit den Eolithen mehr in den Vordergrund getreten ist, mit den *Reihen von einseitig gerichteten Schlagmarken* (retouches) an den Kanten von Feuersteinen. Diese Schlagmarken sind die Negative von kleinen Abschlägen und führen durch alle Grössenübergänge zu den Schlagmarken der grossen Abschläge hinüber, ebenso wie ja auch die positiven Abschläge in allen denkbaren Grössen vorkommen können. Die Entstehung aller beruht immer auf demselben Princip und bei allen sind immer die typischen Schlagsymptome zu sehen. Sie können aber durch die verschiedensten Druckwirkungen entstehen, genau so wie die grossen Abschläge und Schlagmarken, nur dass für ihre Herstellung geringere Druckwerthe genügen. Von den Factoren, die bei absichtlicher Einwirkung Reihen von gleichgerichteten kleineren Schlagmarken hervorbringen, sind für die Beurtheilung steinzeitlicher Manufacte besonders drei Manipulationen wichtig, das ist die Benutzung einer Kante zum Schaben oder Kratzen, das Behauen mit einem Feuerstein und das Abpressen mit Horn oder Knochen. Da es unter Umständen von grossem Werth für die Beurtheilung der Kulturhöhe sein kann, festzustellen, welche Manipulation an einem Feuersteinstück zum Ausdruck gekommen ist, so habe ich lange Zeit experimentelle Studien angestellt, um differenzial-diagnostisch brauchbare Kriterien zu finden. Ich muss gleich hier sagen, dass sich solche unbedingt für jeden Fall entscheidende Kriterien nicht geben

lassen, denn da es sich ja bei allen drei Fällen in letzter Linie immer um Wirkungen des Druckes handelt, so wird die Erscheinung auch im Princip überall dieselbe sein. Aber wenn man daher auch im einzelnen Falle gelegentlich zweifelhaft sein kann, welcher Manipulation die Randbeeinflussung ihre Entstehung verdankt, so lassen sich doch gewisse quantitative Unterschiede finden in Bezug auf Grösse und Tiefe der einzelnen Schlagmarken, in Bezug auf Gleichmässigkeit ihrer Sprungfläche und Ausbildung der Wellenringe, ferner in Bezug auf Regelmässigkeit der Anordnung zu Reihen und in dem Verlauf der Randlinie etc., die in der Regel eine Entscheidung gestatten. Es kommt daher darauf an, eine möglichst feine Diagnostik zu entwickeln, die sich auf diese kleinen quantitativen Verschiedenheiten stützt und im gegebenen Falle durch sorgfältige Kritik der vorliegenden Combination aller in Betracht kommenden Momente es gestattet, die Randbeeinflussung auf eine bestimmte Art der Einwirkung zu beziehen. Die Ausbildung einer solchen Diagnostik, die nur durch experimentelle Studien geschehen kann, ist natürlich nicht mit einem Schlage zu gewinnen. Sie wird Zeit zu ihrer Entwicklung brauchen. Ich möchte die folgenden Angaben daher auch nur als Beitrag zu einer solchen Diagnostik betrachtet sehen, besonders da ich hier nicht die Ergebnisse meiner experimentellen Studien in extenso mittheilen kann.

1. Gebrauchsspuren, verursacht durch Schaben. Die Materialien, die in den früheren Abschnitten der Steinzeit, besonders mit Feuersteingeräthen bearbeitet sein werden, dürften Holz, Knochen und Häute sein. Ferner würde wohl noch die dem Schaben nahe stehende Thätigkeit des Erdaufkratzens oder Grabens zu berücksichtigen sein, bei welcher Erde, Sand, Kies, kleine Steine auf die Kante des Werkzeugs einwirken. Ich habe für meine Experimente Holz, Knochen und Kies benutzt. Die Unterschiede in der Wirkung, welche diese drei in Bezug auf ihre Härte so sehr verschiedenen Materialien an der Feuersteinkante hervorbringen, sind nicht so gross, wie man erwarten könnte. Ich will daher auf diese hier gar keinen Werth legen. Viel wichtiger sind andere Momente beim Schaben. Das ist zunächst die Stärke des Druckes, den man beim Schaben ausübt. Dieser Druck setzt sich aus zwei Componenten zusammen. Die eine Componente wirkt in der Richtung der zu schabenden Fläche ein, also, da die Schabefläche mit ihrer Schabekante unter einem Winkel auf die zu schabende Fläche aufgesetzt wird, der gewöhnlich kleiner ist als ein rechter, etwa spitzwinklig gegen die Schabefläche. Sie ist bedingt durch das Beugen oder Strecken des Armes, das in der Regel in pectopetaler oder in pectofugaler Richtung geschehen wird. Die andere Componente wirkt senkrecht dazu und ist bedingt durch die Kraft, mit der die Schabekante auf den zu schabenden Gegenstand aufgedrückt wird. Beide Componenten können in Bezug auf ihre Grösse bedeutenden Variationen unterliegen und dementsprechend ist auch die Resultante und damit der Effect an der Schabekante verschieden gross, aber die Grösse variiert nur innerhalb geringer Grenzen. Es ist charakteristisch für die Gebrauchspur, dass sie immer nur kleine Marken am Rande

erzeugt, die durchschnittlich nicht grösser als 1—2 mm sind und selbst bei grösstem Kraftaufwand und bei härtestem Object selten 5 mm überschreiten. Es ist selbstverständlich, dass die Gebrauchsmarken sich nur auf derjenigen Seite des Randes befinden, die der Schaberichtung entgegengesetzt ist, so dass man an der Lage derselben stets die Schaberichtung in Bezug auf den Feuerstein erkennen kann. Was nun ferner wichtig ist, das ist die Abhängigkeit der zweiten Druckcomponente, d. h. der Kraft, mit der die Schabekante aufgedrückt wird, von der Handlichkeit des Stückes. Liegt der Schaber gut in der vollen Hand, so kann er mit grösserer Kraft aufgedrückt werden, als wenn er schlecht passt oder mit spitzen und scharfen Kanten die Vola manus schneidet. Ist der Schaber klein, so kann er nicht in die volle Hand genommen werden, sondern nur zwischen die Fingerspitzen. In diesem Falle ist eine bei weitem nicht so grosse Kraftentfaltung möglich als mit der vollen Hand. Daraus ergiebt sich wieder ein Moment für die Diagnostik. Kleine und unhandliche Schaber werden niemals so grosse Gebrauchsmarken am Schaberande zeigen wie grosse und handliche Exemplare. Ein weiteres Characteristicum der Gebrauchsabnutzung ist die eigenthümliche Gestalt des Querschnitts der Schabekante. Wenn man mit einer scharfen Kante beginnt zu schaben, so sind die ersten Absprünge und ihre Gebrauchsmarken verhältnissmässig gross und der neuentstandene Kantenwinkel ist noch ziemlich klein. Die folgenden Absprünge werden immer kleiner, so dass sie nur immer den vordersten Abschnitt der vorhergehenden Gebrauchsmarken entfernen. Auf diese Weise wird der Kantenwinkel am Rande immer grösser. Nach wenigen Minuten des Gebrauchs springt beim Schaben, selbst bei grösstem Kraftaufwand, überhaupt nichts mehr vom Rande des Feuersteins ab. Die letzten Gebrauchsmarken sind schon winzig klein und äusserst eng aneinander. Die Kante ist stumpf und zeigt auf dem Querschnitt eine etwa bogenförmig und steil abfallende Linie (Fig. 5). Von der Fläche sieht man, wie sich die kleineren und kleinsten Gebrauchsmarken nach einander auf die grösseren und grössten aufgelagert haben. Das ist um so deutlicher ausgeprägt, je handlicher das Stück ist und je intensiver seine Benutzung war. Die Schabekanten gewinnen dadurch eine gewisse Gleichmässigkeit ihres Verlaufes. Es fehlen an ihnen scharfe, aus dem Rande hervorragende Spitzen; wo Spitzen vorhanden sind, da sind sie stumpf. Die Gebrauchsmarken liegen ziemlich regelmässig und parallel neben einander, sie sind verhält-

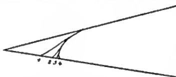


Fig. 5.

Schema der Gebrauchsabnutzung einer Feuersteinkante im Querschnitt. 1, 2, 3, 4 die Querschnitte der Flächen, in denen nach einander die Absprünge erfolgen. Die ersten Absprünge sind grösser, die letzten werden immer kleiner. Schliesslich springt nichts mehr ab, die Kante hat eine abgerundete Form angenommen, an der man noch die Reste der nach einander erfolgten Absprünge erkennen kann.

nissmässig flach und ohne tiefe Wellenringe und zeigen selten Splitterbrüche an ihrem auslaufenden Muschelrande.

2. Randbearbeitung durch Behauen. Schlägt man mit einem Behaustein wiederholt in derselben Richtung auf eine Feuersteinkante, indem man mit den Schlägen längs der Kante fortschreitet, so entstehen Reihen von Schlagmarken, die sich sehr gut characterisieren lassen, obwohl sie je nach der Stärke der Behauung, je nach der Gestalt und Anwendung des Behausteins (ob spitz oder stumpf, ob mit Kante oder Fläche verwendet) sehr verschieden sein können. Was für die Behauung besonders bezeichnend ist, das ist die Ungleichmässigkeit der Schlagmarken in Bezug auf ihre Grösse. Es finden sich an einer behauenen Kante immer sehr grosse und sehr kleine Schlagmarken neben einander. Dabei sind die grösseren Schlagmarken durchschnittlich ziemlich tief und haben meist auch tiefe Wellenringe. Ferner lösen sich bei der Behauung die Abschläge sehr häufig nicht vollständig ab, sondern bleiben mit ihrem Ende an der Schlagmarke sitzen, so dass die auslaufenden Ränder der Schlagmarken nur Sprünge mit nicht abgelösten Splittern vorstellen. Das häufige Vorkommen von solchen Splitterbrüchen ist daher characteristisch für die Behauung. Der Verlauf der Randlinie kann sich ebenfalls sehr characteristisch gestalten, besonders bei Behauung mit der Spitze oder Kante eines Behausteins, die ja die Regel bilden wird. Die Randlinie zeigt dann im Gegensatz zur gebrauchten Kante kleinere oder grössere, spitze und scharfe Zacken. Solche hervorragenden Spitzen fehlen aber vollständig bei Behauung des Randes mit der Fläche eines Behausteins. In diesem Falle besitzt die Kante eine ziemlich gleichmässig fortlaufende Randlinie und daran zahllose kleine und kleinste Schlagmarken neben den grossen. Das kann leicht eine Gebrauchsspur vortäuschen und man wird in einzelnen Fällen zweifelhaft sein können, ob eine Kante, nachdem sie durch spitze Behauung bearbeitet wurde, zum Schaben benutzt oder durch Behauung mit der Fläche des Behausteins noch nachgearbeitet worden ist. Da indessen durch stärkere Behauung der Kante mit der Fläche des Behausteins der Vortheil der Randbearbeitung, die Schärfung des Randes zum Schaben, ebenso wie durch den Gebrauch wieder verloren geht, so wird man da, wo sich auf grosse und tiefe Schlagmarken kleine und kleinste superponieren, stets eher an die Gebrauchsabnutzung eines bearbeiteten Randes denken als an eine nachträgliche Bearbeitung mit einem flachen Behaustein.

3. Randbearbeitung durch Abdrücken. Diese Art der Randbearbeitung ist vielleicht am wenigsten augenfällig zu characterisieren, aber da sie jedenfalls eine in den ältesten Abschnitten der Steinzeit noch nicht verwendete Methode ist, so hat das für den vorliegenden Zweck keine besondere Bedeutung. Im Allgemeinen pflegen die Druckmarken bedeutend flacher zu sein als die Schlagmarken und durchschnittlich etwas grösser als die Gebrauchsmarken. Auch sind die Druckmarken

gewöhnlich etwas regelmässiger als die Schlagmarken und zeigen häufiger Splitterbrüche als die Gebrauchsmarken. Am meisten unterscheiden sie sich aber wohl von den letzteren durch die Beschaffenheit der Randlinie. Die Randlinie ist bei ihnen im Gegensatz zur Gebrauchsspur stets mehr oder weniger scharfzackig. Die Zacken können sehr verschieden gross sein und sehr verschieden weit von einander stehen, je nachdem das Druckinstrument in engen oder weiten Abständen aufgesetzt worden ist, aber selbst bei gleichmässigstem Verlauf der Randlinie findet man doch bei genauer Betrachtung immer kleine scharfe und spitze Vorsprünge, die beim Gebrauch stets abgestumpft sein würden. Eine Lupenuntersuchung kann hier im zweifelhaften Fall wohl immer die Entscheidung geben. Freilich wird bei nachträglich abgerollten Stücken hier wie auch sonst die Differentialdiagnose sehr erschwert, oft wohl überhaupt unmöglich gemacht werden.

Ich habe hier nur andeutungsweise eine Reihe von Characteren namhaft machen können, die im gegebenen Falle für eine Entscheidung über die Art der künstlichen Beeinflussung sich brauchbar erweisen. Sicherlich wird ein ferneres experimentelles Studium in dieser Hinsicht unsere Differenzial-Diagnostik noch wesentlich erweitern und vertiefen. Aber — und hier komme ich auf den springenden Punkt — sind denn derartige einseitige Randbeeinflussungen, wenn man sie an einem gegebenen Fundstück beobachtet, überhaupt immer mit Sicherheit auf eine absichtliche Manipulation mit dem Feuerstein zu beziehen? Da muss ich gestehen, dass ich das nicht ohne weiteres behaupten möchte. Ich halte es auch bei dieser Gruppe von Beeinflussungen, die in der neuesten praehistorischen Litteratur eine so grosse Rolle spielt, nicht für ausgeschlossen, dass sie gelegentlich durch rein anorganische Factoren hervorgebracht werden könnte. Ich kann mir vorstellen, dass z. B. scharfkantige Feuersteinstücke aus einer Lehmwand hervorragen und dass von oben her Kiesmassen darüber fallen. Dann müssen, namentlich wenn das öfter geschieht, ganze Reihen von gleichseitig gerichteten Schlagmarken am Rande entstehen. Oder ich kann mir denken, dass bei Druckwirkungen, wie sie etwa vom Gletschereise auf Kies-, Lehm-, Geröllschichten etc. hervorgebracht werden, scharfrandige Feuersteinstücke in einer bestimmten Richtung gegen Kies- oder Sandmassen gepresst werden, so dass am Rande einseitig gerichtete Absprünge erfolgen. Wenn das aber auch nur gelegentlich einmal der Fall sein kann, dann bilden solche Reihen von einseitig gerichteten Schlagmarken an der Kante eines Feuersteins an sich ebensowenig einen einwandsfreien Beweis für seine Manufactnatur, wie die Existenz einer Schlagbeule oder der anderen Schlagerscheinungen.

Wie steht es dann aber mit der Entscheidung über die Manufactnatur? Es könnte danach scheinen, als ob es überhaupt keine Kriterien gäbe, nach denen man mit Sicherheit einen Feuerstein als Manufact erkennen könnte! Indessen dem ist nicht so. Was ich bestreite, ist nur die Berechtigung der Annahme, dass ein einziges Moment (Schlagerscheinungen oder Reihen einseitiger Rand-

beeinflussung) *an sich* schon unbedingt und allgemein beweisend für die Manufactnatur sei. Ich stelle dem gegenüber die unabweisliche Forderung auf, dass von Fall zu Fall eine kritische Diagnose gestellt werden muss, die sich gründet auf eine tief eindringende Analyse der Erscheinungen am gegebenen Stück und der Fundbedingungen. Die Diagnose des individuellen Stückes aber darf sich nicht bloss auf *ein*, sondern muss sich auf eine ganze *Reihe* von Momenten gründen, genau so wie die Diagnose des Arztes bei manchen inneren Krankheiten. Nur wenn die Diagnose sich auf die characteristische *Combination* von mehreren Symptomen stützt, kann sie sicher sein. Steht mir nur ein einziges Symptom zur Verfügung, so kann ich in den meisten Fällen keine sichere Diagnose stellen. *Worum wir uns bemühen müssen, ist also nicht die Auffindung eines einzelnen, immer und überall entscheidenden Kriteriums für die Manufactnatur; ein solches Kriterium existiert in Wirklichkeit nicht und jede Jagd danach ist vergeblich. Worum wir uns bemühen müssen, ist vielmehr die Entwicklung einer kritischen Diagnostik, die in analoger Weise ausgebildet ist wie die Diagnostik des Arztes. Je feiner wir diese Diagnostik durch Beobachtung und Experiment entwickeln, um so mehr wird sich die Zahl der zweifelhaften Fälle für uns vermindern. Die kritische Analyse der gegebenen Combination von Symptomen ist es allein, die uns in den Stand setzt, die Entscheidung zu treffen.*

Ich will das an einem Beispiel erläutern: Finde ich in einer interglacialen Geröllschicht einen Feuerstein, an dem eine deutliche Schlagbeule zu sehen ist, sonst aber kein weiteres Symptom absichtlicher Bearbeitung, so werde ich zweifelhaft sein, ob ich ein menschliches Manufact vor mir habe. Finde ich dagegen einen Feuerstein, der auf der einen Seite die typischen Schlagerscheinungen zeigt und der auf der Rückseite noch die Negative von zwei, drei, vier anderen, in der gleichen Richtung abgesprengten Abschlägen trägt, befinden sich ferner an einer Kante des Stückes zahlreiche, parallel nebeneinander verlaufende kleine Schlagmarken, die alle ohne Ausnahme von der gleichen Seite des Randes her abgeschlagen sind, erscheinen schliesslich die übrigen Kanten des Stückes vollkommen haarscharf ohne eine Spur von Schlagmarken oder Spuren der Abrollung: dann kann ich mit unerschütterlicher Sicherheit sagen: es ist ein Manufact. So wenig, wie durch Zusammenwirken rein anorganischer Factoren je ein palaeolithischer Faustkeil oder ein neolithisches Steinbeil entsteht, obwohl alle einzelnen Momente, die zu seiner Bildung nothwendig sind, wie Schlag, Druck, Schliff etc. für sich auch in der anorganischen Natur auftreten können, so wenig kommt durch anorganische Kräfte je ein Feuersteinstück zu Stande, das den oben geschilderten Complex von Symptomen besitzt.

Derartige völlig einwandsfreie Stücke habe ich nun in grösserer Zahl am Puy de Boudieu eigenhändig aus der ungestörten Schicht genommen. Damit ist der unerschütterliche Be-

weis für die Existenz von feuersteinschlagenden Wesen im Ausgang der Miocänzeit geliefert.

Die Fundobjecte.

Die einzigen Spuren menschenähnlicher Wesen, die ich in den miocänen Flusssanden des Cantal habe finden können, sind Feuersteinwerkzeuge. Somatische Reste dieser Wesen sind bis jetzt nicht aufgefunden worden. Auch andere Spuren habe ich trotz sorgfältiger Durchforschung der Fundschicht nicht beobachtet. Die kleinen Stückchen schwarzbrauner Substanz, die Klaatsch[1]) in seiner letzten Mittheilung erwähnt, habe ich ebenfalls am Puy de Boudieu im Tuffsand mehrmals gefunden. Sie sind unverbrannte Theilchen von Lignit, die typische Holzstructur zeigen und über der Flamme zu weisser Asche verbrennen. Irgend welche Spuren absichtlicher Beeinflussung lassen sie nicht erkennen. Auch anderes Steinmaterial als Feuerstein ist zu den Werkzeugen nicht benutzt worden, obwohl z. B. Quarzgerölle z. Th. von mehr als Faustgrösse in grosser Zahl an allen fünf Fundorten vorkommen, an denen ich gegraben habe, am Puy de Boudieu, am Puy Courny, bei Veyrac, im Bois de la Condamine und bei Belbex. An diesen Quarzgeröllen habe ich, obwohl ich mein Augenmerk stets auf sie richtete, niemals Spuren absichtlicher Einwirkung finden können. Sie sind stets mehr oder weniger rundlich abgerollt.

Nur Feuerstein ist als Material für Werkzeuge benutzt worden. Dieser aber in grossem Umfange. Am Puy de Boudieu, meiner Hauptausgrabungsstelle, für deren Nachweis ich Herrn Pierre Marty ganz besonders dankbar bin, habe ich den Eindruck gewonnen, dass nicht nur bei weitem die grösste Zahl aller Feuersteine durch die Hände der menschenähnlichen Wesen gegangen ist, sondern auch, dass dieselben später keine weitere Verschleppung erfahren haben, da sie zum grössten Theil noch ihre haarscharfen Kanten besitzen. Hier sind die Werkzeuge offenbar am Orte, wo sie geschlagen sind, auch vom Schlammstrom oder Aschenregen eingebettet worden. Die Schollen von miocänem Flusssand und Schotter, die am Puy de Boudieu vom vulkanischen Tuff eingeschlossen und bedeckt liegen, sind offenbar Reste des alten miocänen Fluss- oder Bachufers, die an Ort und Stelle erhalten worden sind. Dadurch gewinnt grade diese Fundstelle erhöhte Bedeutung.

Das Rohmaterial für die Werkzeuge lieferten die in den miocänen Fluss- und Bachthälern an der Oberfläche liegenden Feuersteine, die vom Wasser aus

1) Klaatsch: „Die tertiären Silexartefacte aus den subvulkanischen Sanden des Cantal". Im Arch. f. Anthropol. Neue Folge Bd. III, Heft 3, 1905.

den darunter liegenden oligocänen Schichten mit ihren Feuersteinbänken herausgewaschen worden waren. Dieses Ausgangsmaterial besass und besitzt noch heute zum allergrössten Theil die Gestalt von Platten mit parallelen Oberflächen, deren Grösse ganz ausserordentlich variiert von handtellergrossen, zwei bis drei cm dicken Stücken bis zu 50 und mehr cm grossen und 15—20 cm dicken Platten, die z. Th. an den Kanten rundlich abgewaschen, z. Th. noch mit deutlichen Bruchkanten versehen sind. Alle Platten besitzen eine mehr oder weniger dicke weichere Verwitterungs- oder Kalkkruste. Die Plattenform des Ausgangsmaterials ist wichtig, denn sie beherrscht ganz wesentlich die Form der Werkzeuge, insofern als die letzteren entweder direkt kleine Platten vorstellen oder aus Abschlägen von solchen Platten hergestellt worden sind. Fast überall erkennt man an den Werkzeugen aus den Resten der Kruste ihre Abstammung von der Plattenform.

Characteristisch für die bearbeiteten und unbearbeiteten Feuersteine aus der miocänen Schicht ist die Patina. Während die Feuersteinplatten in ihrer primären oligocänen Lage überall weiss erscheinen, haben sie in ihrer secundären miocänen Lagerstätte fast ausnahmslos eine mehr oder weniger dunkle, glänzende Patina, die vom dunklen Braungelb bis zum tiefen Schwarz variiert. Ganz überwiegend sind die intensiv schwarzglänzenden Stücke. Bei Belbex sind auch schöne blutroth gefärbte Feuersteine nicht selten. An dieser typischen Patina sind die miocänen Feuersteinwerkzeuge stets leicht von den späteren aus den diluvialen Schichten zu unterscheiden. Die letzteren sind immer weiss oder hellgelb.

Was nun besondere Beachtung verdient, ist die Thatsache, dass man in der miocänen Schicht nicht selten bearbeitete Feuersteine findet, an denen man Schlagmarken von verschieden gefärbter Patina sieht. Das eine System von Schlagmarken erscheint dunkel, das andere hell patiniert und zwar grenzt sich die Farbe an den Rändern der Schlagmarken vollkommen scharf ab. Anfangs glaubte ich, dass es sich hier um Steine handele, die beim Abbrechen der Tuffmassen oder der z. Th. fest verkitteten Geröllmassen verletzt worden sind. In der That habe ich mich überzeugt, dass viele Feuersteine von den Arbeitern beim Herauslösen aus dem ziemlich harten Material mit der Picke zerschlagen oder beschädigt werden. So konnte ich z. B. feststellen, dass auch die heller gefärbten Spuren von Schlägen, die man bisweilen auf der Kruste von Feuersteinen aus Aurillac in den Sammlungen beobachtet, und die auch ich anfangs auf einzelnen meiner Stücke in deutlicher Ausprägung fand, von den Arbeitern herrühren. Sie sind also nicht, wie manche Forscher geglaubt haben, Spuren alter Schläge, die in der Miocänzeit absichtlich auf die Oberfläche der Steine ausgeführt wurden. Infolgedessen habe ich die grösste Vorsicht angewendet, um jede Verletzung der Feuersteine beim Herauslösen zu verhindern. Indessen fand ich doch bald, dass auch an Steinen, an denen jede Verletzung beim Herausnehmen aus der Schicht vollkommen ausgeschlossen war, bei Steinen, die ich in

grosser Zahl eigenhändig, ohne sie direkt zu berühren, aus der Schicht löste, häufig genug zweierlei Patina auf den Schlagmarken vorkommt. Im Übrigen kann man bei einiger Übung fast immer mit Sicherheit entscheiden, ob eine Schlagmarke alt oder neu ist. Da also die Thatsache, dass auch an vielen unverletzt herausgenommenen Stücken zweierlei Patina vorkommt, ausser allem Zweifel steht, so ergiebt sich, dass diese Stücke wiederholt während der Miocänzeit bearbeitet worden sind. Nach ihrer ersten Bearbeitung und Benutzung lagen sie längere Zeit unbenutzt auf der Erde. Später wurden sie gelegentlich wieder aufgenommen, wieder bearbeitet und wieder benutzt.

Ausser der typischen Patina zeigen manche der Stücke auch mehr oder weniger umfangreiche Sinterbedeckungen und Dendritenbildungen an einzelnen Stellen der Oberfläche. Wenn solche Sinteransätze und Dendriten sich bei Stücken mit zweierlei Patina auf den hellen wie auf den dunklen Schlagmarken finden, so beweisen sie natürlich ganz schlagend, dass die Schlagmarken mit hellerer Patina nicht erst beim Ausgraben entstanden sein können.

Was schliesslich die Grösse der Werkzeuge betrifft, so ist es nicht richtig, was MORTILLET[1]) darüber sagt: „leurs instruments sont petits". Es giebt in Wirklichkeit Werkzeuge von sehr verschiedener Grösse, kleine und zierliche von wenigen Centimetern und grosse, schwere, massige von 15 und 20 Centimetern Durchmesser. Wohl von allen kann man sagen, dass sie auch uns noch gut in die Hand passen. Ich finde in Grösse und Handlichkeit keinen Unterschied gegenüber den palaeolithischen Werkzeugen. Damit fällt selbstverständlich auch die Berechtigung von MORTILLET's Schluss, den er aus der angeblichen Kleinheit der Werkzeuge auf die Körpergrösse seiner hypothetischen „homosimiens" zieht, „c'est que ces animaux étaient d'une taille inférieure à celle de l'homme". In den Werkzeugen liegt kein Grund für eine solche Annahme.

Ich lasse nun die Beschreibung und Abbildung einiger typischen Fundstücke folgen.

1. Abschläge.

Abgeschlagene Stücke kommen in sehr grosser Zahl vor. Ich habe unter 199 bearbeiteten Stücken, die ich im Ganzen an allen Fundorten gesammelt habe, 98 Stücke mit Schlagbeule gefunden. Das ist also ungefähr 50%. Indessen ist die Zahl der Abschläge in Wirklichkeit noch viel grösser, denn unter den 98 Stücken sind diejenigen nicht mitgerechnet, deren oberer, die Schlagbeule tragender Theil abgebrochen ist, die aber an anderen Schlagerscheinungen, wie Strahlensprüngen, Krümmung der Sprungfläche etc. als echte Abschläge kenntlich sind.

Die Grösse variiert innerhalb weiter Grenzen. Es finden sich kleine scharfe Splitter von wenigen Millimetern und schwere dicke Stücke von 10 Centimetern.

1) MORTILLET: „Le préhistorique etc.". III. Edition, Paris 1900, pag. 97.

Dazwischen kommen alle Grössen vor, wie das ja bei der Bearbeitung von Feuerstein selbstverständlich ist. Am häufigsten sind Stücke von etwa 4—5 Centimetern.

Die typischen Schlagerscheinungen, wie Schlagfläche, Schlagbeule, Schlagnarben, Strahlensprünge, Krümmung der Sprungfläche sind deutlich ausgeprägt. Nur die Wellenringe auf der Sprungfläche sind meistens nicht stark entwickelt und die Kegelsprünge wohl niemals zu sehen. Letzteres liegt aber offenbar an der Undurchsichtigkeit des Materials, und seiner starken, dunklen Patinierung.

Der Rücken der Abschläge trägt mitunter noch die Rinde, zum allergrössten Theil aber die Schlagmarken früherer Abschläge, die fast immer in der gleichen Richtung abgesprengt sind. Bisweilen verlaufen vier oder fünf Schlagmarken parallel über den Rücken und häufig sind die Negative der Schlagbeulen noch gut erhalten. Daneben sieht man nicht selten starke Splitterbrüche von früheren, in gleicher Richtung erfolgten Schlägen. Die Formen der Abschläge sind zwar ziemlich mannigfaltig, doch herrschen bei weitem die breiten Lamellen vor, während die langen schmalen seltener sind. Sehr häufig kehrt eine unregelmässige Trapezform mit characteristischer Krümmung der Sprungfläche wieder, bei der die schmale Parallelseite oben gelegen ist. Die etwas grösseren Abschläge lassen fast immer die Reste der Kruste am oberen und unteren Ende erkennen und zeigen ihre Absprengung von einer Platte auf den ersten Blick. Wie ich mich durch experimentelle Studien mit dem gleichen Material an Ort und Stelle überzeugen konnte, ist die vorherrschend breite und oft trapezförmige Gestalt der Abschläge ganz durch die Plattenform des Ausgangsmaterials bedingt. Ich habe von den alten Platten der miocänen Schicht eine ganze Anzahl mit Hausteinen aus demselben Material behauen und habe dabei Abschläge bekommen, die in gradezu lächerlicher Weise die Formen der alten wiederholen. Bei diesen Versuchen an trockenem sowohl wie an erdfeuchtem Material habe ich mich überzeugt, dass ein sehr grosser Kraftaufwand dazu gehört, um Abschläge abzusprengen. Der Feuerstein ist sehr hart und die verhältnissmässig weiche Kruste dämpft die Intensität des Schlages ganz beträchtlich. Man muss mit aller Kraft den Haustein auf die Platte schlagen, um nur einigermassen grosse Abschläge zu erhalten. Aus dieser Dämpfung des Schlages durch die Kruste erklärt sich die Thatsache, dass an den alten wie an den neuen Abschlägen die Schlagbeulen nie sehr hoch und die Wellenringe nur selten deutlich entwickelt sind. Übrigens zeigen die palaeolithischen Abschläge aus der unteren Diluvialterrasse, von denen mir Herr Puech eine Anzahl schenkte, die gleichen Eigenthümlichkeiten wie die tertiären und die modernen und stimmen in ihren Formen ebenfalls vollkommen mit diesen überein.

Ich habe auf Tafel I und II eine Anzahl der alten miocänen Abschläge abgebildet.

2. Kernsteine.

Wo so viel Abschläge zu finden sind, da müssen nothwendiger Weise auch die Kernsteine vorhanden sein, von denen die Abschläge abgesprengt sind. In der That findet man eine grosse Zahl von Feuersteinplatten, an deren Rändern man die charakteristischen Schlagmarken mit dem Negativ der Schlagbeule wahrnimmt. Es ist merkwürdig, dass die früheren Beobachter davon nichts erwähnen, denn solche Kernsteine kommen in allen Grössen vor, in denen die Platten überhaupt auftreten. Man hat eben einfach eine beliebige Platte genommen und von ihrem Rande einen oder mehrere Abschläge abgesprengt. Bisweilen finden sich eine ganze Anzahl grosser Schlagmarken nebeneinander um den Rand der Platte herum, vorwiegend in der gleichen Schlagrichtung, hin und wieder jedoch auch in entgegengesetzter Richtung verlaufend. Manche von den Schlagmarken fordern geradezu heraus zu versuchen, ob nicht dieser oder jener Abschlag noch heute hineinpasst. Davon kann natürlich nicht die Rede sein, aber die Ähnlichkeit von negativer und positiver Sprungfläche ist manchmal frappierend. Einzelne Kernsteine sind nicht grösser als 5 oder 10 cm im Durchmesser und stellen zweifellos Werkzeuge vor zum Schaben oder Hacken. Auch unter den grösseren machen einige den Eindruck von groben Werkzeugen und es ist unmöglich, nachträglich festzustellen, ob man die Platte behauen hat, um Abschläge zu gewinnen oder um ein grobes Werkzeug herzustellen.

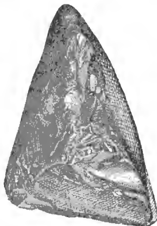
3. Hausteine.

Zum Absprengen der Abschläge waren Hausteine nöthig. Es müssen sich also Steine finden, an denen die characteristischen Wirkungen wiederholten Aufschlagens an einer oder mehreren Ecken zu sehen sind. Da ist es mir aufgefallen, dass solche stark zerarbeiteten Steine von erforderlicher Grösse, die man sofort als Hausteine ansprechen muss, verhältnissmässig selten sind. Gewiss, ich habe einige Stücke gefunden, die sich auf den ersten Blick als Hausteine präsentieren durch die starke Zersplitterung und Zerarbeitung einer Ecke, von der zahlreiche Schlagmarken nach allen Richtungen hin ausstrahlen und die mit zahllosen kleinen Sprüngen und Splitterbrüchen besät ist (Fig. 6). Aber häufig sind solche Hausteine nicht. Da nun doch eine sehr grosse Zahl von Kernsteinen und Abschlägen vorhanden ist, die darauf hinweist, dass die Spaltung des Feuersteins in grossem Umfange betrieben wurde, und da sich kein anderes Material findet, mit dem die Spaltung der Platten vorgenommen sein könnte, so bleibt nur der Schluss übrig, dass ein Haustein immer nur für wenige Schläge benutzt und dann weggeworfen wurde, so dass sich an ihm keine stärkere Zerarbeitung in der typischen Form bemerkbar macht. Damit stimmt auch die Thatsache überein, dass man so viele Kernsteine findet, von denen nur ein oder zwei Abschläge abgespalten sind. Man hat offenbar, wenn das Bedürfniss nach einem Abschlag auftrat, eine Platte vom Boden aufgenommen und mit einem passenden Feuersteinstücke, das grade an der Erde lag, einen Abschlag

davon abgespalten, um ihn für einen bestimmten Zweck zu verwerthen, die Platte und den Haustein aber hat man wieder weggeworfen. Es lag ja genug Material am Bachrande auf der Erde herum.

4. Ambosse.

Rutot[1]) ist zu der Überzeugung gelangt, dass die grossen Platten mit zahlreichen Schlagmarken am Umfange, von denen ihm Pierre Marty einige übersandt hat, Ambosse sind, auf denen man Fruchtkerne oder Knochen aufgeschlagen hat. Auf diese Weise erklärt sich Rutot die Schlagmarken an den Rändern, indem er meint, dass die Schläge bisweilen von dem Object abgeglitten sind und, indem sie den Stein trafen, einen Abschlag vom Rande der Platte abgesprengt haben. Rutot schreibt mir darüber: „A ce propos je vous dirai que M. Marty m'a envoyé deux dalles du Puy de Boudieu, dont je ne possédais pas encore de bon specimen et que j'interprétais comme „enclumes". L'examen de ces spécimens m'a complètement confirmé dans ma manière de voir, ce sont évidemment des enclumes tout à fait semblables à telles que je possède du Reutélien, du Strépyien et du Néolitique. La théorie de ces enclumes est simple. C'étaient des dalles assez épaisses sur lesquelles on appuyait les objects durs à briser: os, fruits etc. Or ces objects durs, os, fruits, etc. ont des contours arrondis et souvent des surfaces grasses et glissantes, de sorte que beaucoup de coups partés au moyen du percuteur n'arrivant pas normalement à la surface de l'os à briser, par exemple, le percuteur, par sa force vive faisait ricochet à la surface et venait frapper plus ou moins violemment les bords des enclumes. Il se détachaient donc ainsi, par l'usage, de nombreux éclats sur les bords de l'enclume,



Figur 6[2]).
Haustein, von der zum Schlagen benutzten Seite aus gesehen.

1) Rutot: „Le préhistorique dans l'Europe centrale". Namur 1904, pag. 18. Ferner neuere briefliche Mittheilung 1905.

2) Die folgenden Figuren, bei deren Herstellung mich Herr Prof. Kallius mit Rath und That unterstützt hat, sind in folgender Weise entstanden. Die zum Theil auch für die beigegebenen Tafeln benutzten photographischen Platten wurden schwach auf Chlorsilber-Zeichenpapier copiert und fixiert. Dann wurden vom Zeichner mit unlöslicher Tusche die Kanten und Schatten in Linienmanier für zinkographische Reproduction nachgezeichnet und schliesslich die Photographie selbst durch Behandeln des Papiers mit Ferricyankalium und Natriumhyposulfid wieder entfernt. Die Figuren sind alle in natürlicher Grösse.

tantôt d'en le haut, tantôt d'en le bas, suivant que l'enclume était posée sur une face ou sur l'autre et ce sont ces éclats, naturellement portant le bulbe de percussion, qui ont servi á nos ancêtres pour le raclage et pour le grattage, grâce à leurs bords tranchants. Ainsi s'expliquent à la fois la présence des enclumes et en même temps le grand nombre d'éclats utilisés avec le bulbe de percussion".

Dieser Theorie des ausgezeichneten Brüsseler Geologen und Praehistorikers konnte ich auf Grund meiner Beobachtungen und Experimente an Ort und Stelle leider nicht beipflichten. Ich gebe zwar gern zu, dass die grossen Feuersteinplatten beim Zerschlagen von Knochen und Früchten gelegentlich als Unterlagen gedient haben mögen. Das wird man ebensowenig bestreiten wie beweisen können. Allein zu der Annahme, dass bei diesen Manipulationen die grossen Abschläge abgesprungen seien, deren Negative man am Rande sieht, kann ich mich nicht entschliessen. Wie ich mich an Ort und Stelle durch Experimente überzeugt habe, ist das Material dieser grossen Platten ausserordentlich hart. Ausserdem dämpft, wie schon oben bemerkt, die Kruste des Feuersteins die Intensität des Schlages ganz bedeutend. Infolgedessen musste ich meine ganze Kraft anwenden, um mit dem Haustein Abschläge von der mittleren Grösse der alten abzusprengen und doch waren trotzdem noch viele Schläge vergeblich. Das habe ich nicht blos an einem, sondern an allen Stücken beobachten können, die ich zu meinen Versuchen benutzte. Dass aber eine auch nur annähernd solche Kraft, wie sie erforderlich ist, um den Stein zu spalten, auf die Unterlage wirkt, wenn der Haustein von dem schlüpferigen Knochen abgleitet, oder selbst wenn der Schlag statt den Knochen oder die Frucht direct die Platte trifft, halte ich für gänzlich ausgeschlossen. Es finden sich unter den zahllosen Abschlägen im übrigen so grosse und schwere Stücke in so bedeutender Zahl, dass an ein zufälliges Abspringen derselben von einer Platte bei ihrer Benutzung als Unterlage garnicht zu denken ist. Alle diese Massen von Abschlägen können daher unmöglich zufällig von solchen Platten abgesprungen sein, sondern sind ganz zweifellos absichtlich abgeschlagen und die grossen Platten sind ihre Kernsteine, wenn ich es auch, wie ich nochmals betonen will, nicht für ausgeschlossen halte, dass solche Platten gelegentlich auch als Unterlage Verwendung gefunden haben mögen. Ich bin überzeugt, dass der kritische Erforscher der altdiluvialen Culturen Belgiens, sobald er die miocäne Cultur von Aurillac an Ort und Stelle untersucht haben wird, sich ebenfalls dieser Auffassung nicht mehr verschliessen dürfte.

5. Schaber.

Die Schaber in ihren mannigfaltigen Formen bilden den wichtigsten Bestandtheil des miocänen Arbeitsgeräthes. Eine Unterscheidung zwischen Schaber und Kratzer, wie sie die Praehistoriker französischer Sprache machen („racloir" und „grattoir"), möchte ich hier nicht treffen, da einerseits in der deutschen Sprache beide Begriffe sich schwer von einander abgrenzen lassen und da anderer-

seits aus dem Werkzeug selbst kaum etwas Sicheres über die feinere Art seiner Verwendung geschlossen werden kann. Ferner scheint es mir ganz unmöglich, mit einiger Sicherheit aus dem Werkzeug zu entnehmen, ob damit in pectopetaler oder in pectofugaler Richtung geschabt, und selbst oft misslich zu entscheiden, ob es mit der rechten oder mit der linken Hand geführt worden ist. Was man aus dem Werkzeug sicher ersehen kann, ist lediglich seine Gebrauchsrichtung in Bezug auf die Schabekante. Diese ergiebt sich aus der Richtung der Gebrauchs- oder Schlagmarken am Rande.

Der grösste Theil der Schaber besteht aus grossen oder kleinen Abschlägen, doch sind auch einzelne Schaber aus natürlichen Bruchstücken, ja grössere selbst

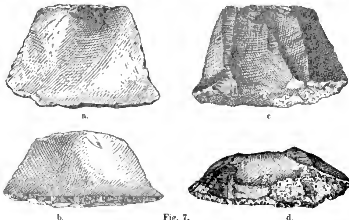


Fig. 7.

Typischer Abschlag, der an der breiten Seite nur Gebrauchsspuren zeigt. a Vorderseite mit hoher Schlagbeule. b Kante schräg zur Vorderseite gesehen. Man sieht die zahllosen kleinen, sämmtlich nach der gleichen Seite verlaufenden Gebrauchsspuren. c Rückseite mit den Resten von 5 früheren Schlagmarken und rechts unten am Rande einen kleinen Rest der Feuersteinkruste. d Schabekante schräg zur Rückseite gesehen, Reste der Kruste, Gebrauchsabnutzung. Vergl. Tafel III Fig. 1.

aus kleineren Platten hergestellt. Ihre Grösse variiert von zierlichen, wenige Centimeter grossen Stücken bis zu ungefügen, handgrossen Werkzeugen.

Einzelne Schaber zeigen nur Gebrauchsspuren am Schaberande, während die anderen Ränder haarscharf sind (Fig. 7). Bei anderen ist der Schaberand durch eine Anzahl gleichgerichteter Schläge bearbeitet. Die für die Behauung characteristischen Zeichen der Schlagmarken (siehe oben pag. 27) sind alle schön und deutlich entwickelt, die Splitterbrüche noch heute vollkommen scharf (Fig. 8). Als Zweck der Randbearbeitung ist fast immer entweder die Abschälung der Kruste oder eine bestimmte Formgebung des Randes klar und zweifellos zu erkennen. Zur Randbearbeitung gesellt sich bei manchen Stücken noch eine deutlich sichtbare

Handanpassung durch Entfernung scharfer Kanten und Spitzen, an Stellen, wo sie verletzen oder hindern mussten.

Je nach der Formgebung des Schaberandes drängt sich die schon mehrfach

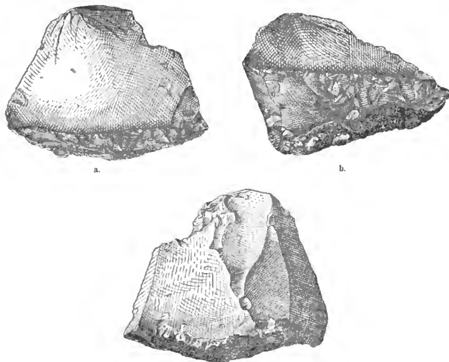


Fig. 8c.

Grosser dicker Abschlag mit bearbeiteter Schabekante. a Vorderseite mit Schlagbeule und Schlagfläche. Am unteren Rande sieht man zahlreiche sämmtlich in der gleichen Richtung verlaufende Schlagmarken dicht neben einander. b Ansicht der Schabekante schräg zur Vorderseite. Unmittelbar unter der Kante ist die Kruste durch zahlreiche Schläge abgeschält. Etwas weiter nach unten ist die Kruste in ganzer Ausdehnung noch erhalten. c Rückseite mit den Schlagmarken von 5 früheren Abschlägen und deutlichen Splitterbrüchen links oben. Vergl. Taf. III Fig. 2.

gebrauchte Eintheilung der Schaber in Gradschaber, Rundschaber, Spitzenschaber und Hohlschaber auf.

Die Gradschaber zeigen eine mehr oder weniger grade verlaufende Schabekante. Der gewöhnliche Typus besteht aus einem Abschlag, dessen eine, meist

dem Treffpunkt gegenüberliegende Kante zum Schaben benutzt oder durch Entfernung der Rinde zugerichtet ist. Bisweilen ist die Bearbeitung des Randes eine erstaunlich sorgfältige, wie in Fig. 3 Taf. III. In der Regel ist das nicht der Fall. Im Gegentheil sehr häufig sind bei der Randbehauung nicht unerhebliche Zacken am Rande entstanden und stehen geblieben. Vergl. Fig. 9 Taf. IV Gradschaber von grossen Dimensionen und groben Formen sind aus kleinen Platten hergestellt, bei denen man die Ränder behauen hat, um sie handlich zu machen. Ihr Schaberand ist durch eine Reihe von Schlägen abgeschrägt und geschärft. In manchen Fällen wird man, wie oben schon bemerkt, zweifelhaft

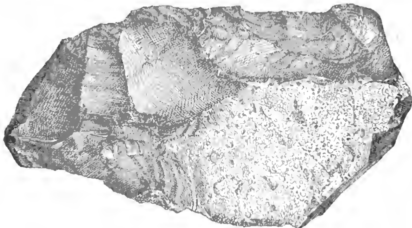


Fig. 9.

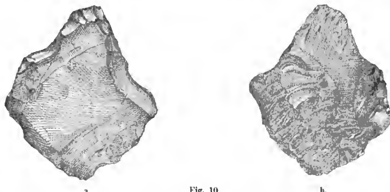
Grosser Rundschaber. Durch mehrere starke Schläge, die parallel neben einander gesetzt sind, ist die Schabekante zugerichtet worden und zeigt nun schwach convexe Form.

sein, ob man einen Schaber oder einen Kernstein vor sich hat, besonders wenn die Ränder durch grössere Schlagmarken zerzackt und unregelmässig erscheinen.

Unter den Rundschabern kommen ebenfalls grobe, die ganze Hand füllende Werkzeuge vor. Bei ihnen ist die Schabekante durch Behauung mehr oder weniger regelmässig convex gestaltet worden. In dem in Fig. 9 abgebildeten Werkzeug liegen die einzelnen Schlagmarken an der Schabekante so regelmässig nebeneinander, dass man an palaeolithische oder sogar neolithische Gegenstände erinnert wird.

Die Spitzenschaber sind Werkzeuge, bei denen die Schabekante eine Spitze bildet, so dass sie zum Ausschaben von Spalten oder Rinnen etwa in Holz oder zwischen Knochen geeignet erscheinen. Sie sind vielleicht von allen Werkzeugen diejenigen, bei denen durch die absichtliche Ausarbeitung der Spitze die Andeutung einer Formgebung, wenigstens der Gebrauchskante des Werkzeuges, am

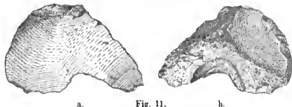
meisten bemerkbar wird. In der That ist die Spitze bisweilen in einer Weise herausgearbeitet, dass man von einer gewissen Sorgfalt bei der Herstellung sprechen möchte. Durch zahlreiche einseitig gerichtete Schläge ist die Kante



a. Fig. 10. b.

Typischer Spitzenschaber mit stumpfer Spitze aus einem platten Feuersteinstück durch Herausarbeiten der Spitze hergestellt. Wie der Vergleich der Vorderseite a mit der Rückseite b zeigt, sind die Schläge, welche die Spitze herausarbeiteten, sämmtlich in der gleichen Richtung und zwar von der Rückseite b her ausgeführt worden. Vergl. Taf. IV Fig. 1.

meist wohl unter Benutzung einer Ecke so umgeformt worden, dass die Absicht, eine Spitze herzustellen, ganz unzweideutig hervortritt (Fig. 10). Ich möchte übrigens als Spitzschaber nur solche Werkzeuge bezeichnen, bei denen die Schlag-



a. Fig. 11. b.

Typischer Hohlschaber aus einem Abschlag hergestellt. a Vorderseite mit Schlagbeule. Unten die concave Schabekante. b Rückseite mit den Schlag- und Gebrauchsmarken der concaven Schabekante. Bearbeitung und Gebrauch geschah von der Vorderseite her. Um die Concavität herum ist die Kruste des Feuersteins erhalten. Vergl. Taf. IV Fig 7.

marken zu beiden Seiten der Spitze in gleicher Richtung verlaufen. Diejenigen Werkzeuge, die auf beiden Seiten der Spitze entgegengesetzte Schlagmarken zeigen, scheinen mir für andere Zwecke gedient zu haben. Die Spitze selbst kann aber innerhalb weiter Grenzen variieren. Sie kann scharf oder stumpf, kurz oder

lang, dünn oder dick sein. In allen Fällen aber ist der Typus leicht zu erkennen. Vergl. Fig. 1, 2, 3, 4 Taf. IV.

Die **Hohlschaber** bilden gewissermassen den Gegensatz zu den Spitzschabern. Bei ihnen ist die Schabekante kreisbogenförmig eingebuchtet (Fig. 6, 7, 8 Taf. IV), so dass sie zum Abschaben von cylindrisch gestalteten Gegenständen, wie Zweigen, Knochen etc. dienen konnten. In der Regel sind die Hohlschaber

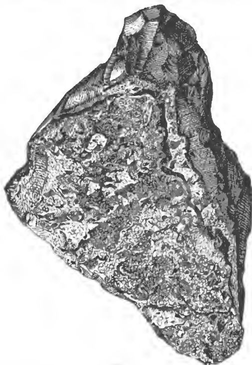


Fig. 12.

Grösseres spitzes Werkzeug zum Hacken oder Graben. Aus einer natürlichen Feuersteinplatte durch Herausarbeiten der Spitze hergestellt. Man sieht auf der Fläche des Stückes die Feuersteinkruste und oben die durch zahlreiche, sämmtlich in gleicher Richtung ausgeführte Schläge herausgearbeitete Spitze. Vergl. Taf. IV Fig. 4.

dadurch hergestellt worden, dass man bei einem Abschlag eine Kante durch eine Anzahl einseitig gerichteter Schläge hohl ausarbeitete. (Fig. 11). Bisweilen ist der Zweck auch schon durch einen einzigen kräftigen Schlag erreicht worden. Characteristisch sind aber in diesem Fall die feinen Gebrauchsspuren, die den ganzen Hohlrand, der natürlich infolge des einzigen Schlages haarscharf sein

musste, in einseitiger Richtung umsäumen. Die Einbuchtung kann einen sehr verschiedenen Radius haben, sie kann stark gewölbt, sie kann flach, sie kann klein, sie kann gross sein. Nicht selten finden sich an einem Stück zwei solcher Einbuchtungen an verschiedenen Rändern (Fig. 8 Taf. IV), wie auch KLAATSCH beobachtet hat, oder ein Rand eines Abschlages ist als Hohlschaber, ein anderer, als Gradschaber bearbeitet (Fig. 5 Taf. IV). Derartige zusammengesetzte Werkzeuge habe ich mehrere gefunden.

Im übrigen gehen die einzelnen Schaberformen vielfach in einander über. Eine ängstliche Einhaltung eines Schemas liegt jener Zeit noch gänzlich fern, wenn auch die Verfolgung eines bestimmten Zweckes bei der Herstellung eines Werkzeuges in der Formung seines Schaberandes schon ganz zweifellos hervortritt.

6. Grobe Werkzeuge zum Schlagen, Hacken oder Graben.

Unter den bearbeiteten Platten finden sich nicht selten Stücke, die aus der Planmässigkeit der Bearbeitung einzelner Partieen des Randes erkennen lassen, dass sie offenbar zu einem bestimmten Zweck gedient haben. Indessen lässt sich dieser Zweck nicht immer ohne weiteres angeben. Am deutlichsten sind wohl diejenigen Werkzeuge, an denen ähnlich wie bei den Spitzschabern eine Spitze herausgearbeitet ist durch Behauung zweier aneinander stossender Kanten. (Fig. 12). Diese zu beiden Seiten der Spitze gelegenen Kanten zeigen daher eine mehr oder weniger deutliche Concavität mit zahlreichen grösseren und kleineren Schlagmarken, während eine solche eingehende Randbearbeitung am übrigen Umfang des Stückes fehlt. Da es sich hier um 15—20 cm grosse Platten handelt, ist natürlich alles grob und in grossem Maassstabe ausgearbeitet, doch fällt der Typus sofort in die Augen, besonders wenn man ihn mehrmals wiederkehren sieht. Fig. 1 Taf. V ist ein characteristischer Vertreter desselben. Diese Werkzeuge, die mitunter an dem der Spitze gegenüberliegenden Rande auch noch eine Handanpassung durch Abschlagen der scharfen schneidenden Kante erkennen lassen, haben jedenfalls als primitivste Faustkeile („coups de poing") zum Schlagen oder Hacken gedient, sei es bei der Bearbeitung von Holz, sei es beim Aufgraben der Erde zum Hacken und Picken, sei es endlich zum Aufschlagen von Knochen. Keinesfalls aber sind Steine damit bearbeitet worden, denn es fehlen an den Spitzen die characteristisch gerichteten Schlagmarken, Splitterbrüche und Kegelsprünge, die den Behausteinen für die Feuersteinbearbeitung eigenthümlich sind.

7. Instrumente zum Stechen, Bohren, Ritzen.

Als Stech- oder Bohrinstrumente kann man vielleicht von den Spitzenschabern diejenigen Werkzeuge sondern, bei denen eine Spitze herausgearbeitet ist dadurch, dass zwei aneinanderstossende Kanten in entgegengesetztem Sinne behauen sind. Die Spitze gewinnt dadurch einen mehr oder weniger deutlich rhombischen Querschnitt. Auch hier ist die Spitze sehr verschieden gestaltet, bald kürzer, bald länger, bald spitzer, bald stumpfer. Da sich diese spitzen

Werkzeuge mit gekreuzter Randbearbeitung zu beiden Seiten der Spitze mehrfach wiederholen, so muss wohl eine specielle Absicht für die Herstellung grade dieses Typus angenommen werden, der sich ja durch die gekreuzte Lage seiner beiden Spitzenkanten weniger zum Schaben eignen würde als die gewöhnlichen Spitzenschaber. Diese Instrumente könnten vielleicht zur Herstellung von Löchern gedient haben, etwa in der Haut von Thieren. Einige von ihnen, die ziemlich flach sind und bei denen infolgedessen auch die Spitze platt und scharf erscheint, mit sehr langgestreckt rhombischem Querschnitt machen mir den Eindruck, als ob sie etwa zum Aufritzen weicher Gegenstände gedient haben könnten. Da ich für die Verwendung von scharfen Splittern als Schneideinstrumente keinen Anhalt gefunden habe, so wäre es nicht ausgeschlossen, dass diese spitzen Werkzeuge eine Art primitiven Schneideinstruments vorstellen. Die Thätigkeiten des Ritzens und Schneidens können ja bei Anwendung primitiver Instrumente sehr nahe miteinander verwandt sein.

Indessen, ich möchte für die hier vorliegende Gruppe von spitzen Instrumenten keine definitive Deutung geben. Es muss erst noch mehr Material gesammelt werden. Dann klärt sich vielleicht auch ihre Bedeutung auf. Es ist ja überhaupt misslich, auf so entlegene, den unsrigen so fremdartige Culturzustände unsere Begriffe des Werkzeugs zu übertragen und die primitiven Instrumente mit den heutigen zu vergleichen. In vielen Fällen wird ja zwar die Deutung ohne weiteres aus den Eigenschaften des Werkzeuges klar hervorgehen wie bei den verschiedenen Schaberformen und den Hausteinen, in anderen Fällen aber wird sie ganz im Dunkeln tasten. So findet sich denn auch im Miocän von Aurillac eine ganze Reihe von Feuersteinen, die zweifellos bearbeitet sind, von denen wir aber nicht recht angeben können, ob sie einem bestimmten Zweck gedient haben, und welches dieser Zweck gewesen sein mag. Ich möchte daher in der Deutung derartiger Objecte vorläufig etwas zurückhaltend sein.

Die Cultur der Miocänzeit.

Ist die Manufactnatur von Feuersteinen im oberen Miocän über allen Zweifel erwiesen, so stellt sich sofort eine Fülle von Fragen ein über die alten Verfertiger dieser Werkzeuge. Man will einen Schritt weiter kommen; man will etwas Näheres vom Leben, von der Culturstufe, von der somatischen Beschaffenheit dieser alten Bewohner des Cantal erfahren, und viele neue Probleme entstehen. Leider bleiben die meisten dieser Fragen vorläufig unbeantwortet und wenn man nicht etwa der Phantasie die Zügel schiessen lassen will, wie das leider selbst von wissenschaftlichen Forschern wie Mortillet schon in ungerechtfertigtem Maasse geschehen ist, dann ist es verschwindend wenig, was man in diesen Fragen heute schon sagen kann.

Einigermassen bekannt ist uns durch die Untersuchungen der französischen Geologen, vor allem durch die Studien von PIERRE MARTY[1]), das Milieu, in dem die alten Bewohner des Cantal lebten. Durch die sorgfältige Erforschung der fossilen Flora von Joursac, die genau gleichaltrig ist mit den manufactführenden Schichten am Puy Courny, am Puy de Boudieu etc. hat PIERRE MARTY eine Menge von Anhaltspunkten gewonnen für die Bestimmung der klimatischen Verhältnisse, die zu jener Zeit im Cantal herrschten. Aus diesen geologischen und palaeontologischen Erfahrungen ergiebt sich etwa folgendes Bild.

Das Land, eine flache Gegend, die ziemlich weit vom Miocänmeere entfernt lag, war in etwa 800 Metern Meereshöhe theilweise von offenen, kräuterreichen Flächen, theilweise von Wäldern und Dickichten bedeckt, die aus Coniferen (Wachholder, Kiefer, Lärche, Fichte, Tanne) und Laubbäumen (Birke, Erle, Buche, Hainbuche, Hopfenbuche, Haselnuss, Eiche, Pappel, Rüster, Zürgel, Feige, Brotfruchtbaum, Lorbeer, Sassafras, Mannaesche, Ahorn, Kreuzdorn, Wallnuss, Hickory, Mehlbeere, Kirsche, Akazie, Weide etc.) gemischt waren. Das Klima war ziemlich milde und trocken. Die mittlere Jahrestemperatur betrug 15° und die jährliche Regenmenge nur etwa 60 cm., kleine Flüsse und Bäche hatten die Thäler noch nicht so tief ausgewaschen wie heute. Teiche und Seen mit Fischen lagen an den Waldrändern. An den Bachufern und Seen stellte sich das Rhinoceros, das Mastodon, das Dinotherium, das Hipparion, sowie der Hirsch und die Gazelle zur Tränke ein. Die Thäler der Flüsse und Bäche waren bedeckt mit Quarzgeröllen aus den nahen Bergen und dazwischen lagen platte Feuersteine, die aus den Kalkschichten der flachen Uferhänge herausgewaschen waren. An diesen Fluss- und Bachufern hielten sich die alten Bewohner der Gegend auf. Hier stand ihnen Wasser zur Verfügung, hier fanden sie Feuersteine, aus denen sie ihre primitiven Werkzeuge machten. Wir wissen nicht, ob sie noch reine Vegetarianer waren, oder ob sie bereits den Hirsch und die Gazelle oder gar die grösseren Thiere erlegten, um sich ihr Fleisch zu verschaffen. Die letztere Möglichkeit ist keineswegs ausgeschlossen. Die rohen spitzen Schlaggeräthe (pag. 41 Fig. 12) können dabei sehr wohl als Hiebwaffen, grosse scharfkantige Feuersteine als Wurfwaffen gedient haben. Jedenfalls gebrach es aber nicht an vegetabilischer Nahrung. Wallnüsse, Haselnüsse, Buchecken, Eicheln, die Frucht des Brotbaums, Mehlbeeren und Kirschen, grosse Wachholderbeeren, zahlreiche Kräuter, Wurzeln und Pilze lieferten Nahrungsmittel genug. So etwa waren die äusseren Verhältnisse beschaffen, unter denen die alten Bewohner des Cantal lebten.

Hier bestand am Ausgang der Miocänzeit bereits eine Cultur, die wie wir aus der Beschaffenheit der Feuersteinwerkzeuge mit Erstaunen sehen, nicht mehr in den ersten Anfängen war, sondern schon eine lange Entwicklung voraussetzt. Was uns am meisten überrascht und was nach allen bisherigen Anschauungen, selbst nach der grossen Erweiterung unserer Erfahrungen über die primitiven Feuersteinkulturen durch

1) PIERRE MARTY: „Flore miocène de Joursac (Cantal)". Paris, Baillière et Fils 1903.

Rutot nicht zu erwarten war, das ist die Thatsache, dass diese miocäne Bevölkerung des Cantal bereits den Feuerstein zu spalten und zu bearbeiten verstand. Den Nachweis dieser Thatsache halte ich für das wichtigste Ergebnis meiner Untersuchungen in Aurillac. Rutot[1]) datiert auf Grund seiner Erfahrungen in Belgien die Erfindung der absichtlichen Spaltung des Feuersteins erst von der Zeit des „Mesvinien", legt aber merkwürdiger Weise auf diesen höchst wichtigen Culturfortschritt garkeinen Werth: „Comme on le voit, l'industrie mesvinienne, entièrement constituée d'outils, ne présente en réalité aucune nouveauté ni modification sensible par rapport aux industries éolitiques plus anciennes". Das spärliche Vorkommen von Abschlägen mit Schlagbeule und anderen Schlagerscheinungen in früheren Perioden führt Rutot nicht auf absichtliche Spaltung, sondern auf zufälliges Abspringen beim Schlagen zurück, sei es, dass die Abschläge vom Haustein, sei es, dass sie von dem als Unterlage dienenden Feuerstein[2]) absprangen. Durch meine Untersuchungen in Aurillac hat sich mir indessen ganz unzweifelhaft ergeben, dass bereits im oberen Miocän die Kenntnis der künstlichen Spaltung des Feuersteins vorhanden war, und ich erblicke in dieser Technik einen höchst wichtigen Culturfortschritt. Das ausserordentlich zahlreiche Vorhandensein von Abschlägen, das Überwiegen von Werkzeugen, die aus solchen Abschlägen hergestellt sind, die beträchtliche Grösse und Schwere vieler Abschläge, der grosse Kraftanwand, welcher bei der schweren Spaltbarkeit des Feuersteins von Aurillac erforderlich ist, um selbst kleinere brauchbare Abschläge abzuspalten, alles das macht es mir unmöglich, die zahllosen Abschläge als das Product zufälliger Absplitterung vom Haustein oder Ambos aufzufassen und zwingt mich vielmehr, darin einen ganz unabweisbaren Beleg für die Kenntnis absichtlicher Feuersteinspaltung zu sehen. Übrigens wäre es ja auch höchst auffällig, wenn die alten Bewohner des Cantal die Kenntnis der Randbearbeitung von Feuersteinen durch Behauen mit einem anderen Stein gehabt, die Absprengung von etwas grösseren Abschlägen, die ja genau auf demselben technischen Princip basiert, dagegen nicht gekannt hätten. Mir scheint, die Erfindung des einen ist von der des anderen nicht gut zu trennen. Sie mussten beide gleichzeitig gemacht werden, ganz gleichgültig, welchen Zweck man zuerst mit der Behauung verfolgte.

Liegt der Zweck der Gewinnung von Abschlägen, wie die ganz allgemein übliche Verwendung derselben zur Herstellung von Werkzeugen beweist, ohne weiteres auf der Hand, so wirft die grosse Reihe von Werkzeugen, die ich in Aurillac sammelte, auch einiges Licht auf den Zweck, den man bei der Randbearbeitung verfolgte. Es kann kein Zweifel sein, dass man dabei die Herstellung geeigneter Schabekanten im Auge hatte. Das geschah aber in doppeltem Sinne. Einmal handelte es sich lediglich darum, die unebene und bröcklig-mürbe Kruste des Feuersteins vom Schaberande zu entfernen, um

1) Rutot: „Le Préhistorique dans l'Europe central". Namur 1904.
2) Siehe oben pag. 35.

eine scharfe, harte Kante zu erhalten. Bei zahlreichen Stücken, die ich sammelte, springt diese Absicht sofort in die Augen und es drängt sich die Vermutung auf, dass hierin vielleicht der primäre Zweck aller Randbearbeitung lag. Die gleiche Absicht lag jedenfalls vor, wenn man wie RUTOT das besonders betont, den gebrauchten Schaberand durch Behauen mit einem Stein wieder anfrischte, um ihn, nachdem er durch den Gebrauch stumpf geworden war, wieder scharf zu machen. Das andere Mal dagegen kam es darauf an, der Schabekante eine bestimmte, für den speciellen Gebrauch geeignete Form zu geben.

In der Ausbildungsstufe dieser Randbearbeitung aber finden wir ein weiteres Moment, das uns bei der miocänen Cultur überrascht. Es zeigt sich hier bereits eine weitgehende Differenzierung und Anpassung der Werkzeuge für specielle Zwecke. Die Typen der Gradschaber, der Rundschaber, vor allem aber der Spitzschaber und Hohlschaber, die wir in langen Reihen mit ihren charakteristischen Merkmalen immer wiederkehren sehen, sind bereits so scharf specialisiert, dass man unbedingt auf eine Verwendung für ganz verschiedenartige Zwecke schliessen muss, wenn es sich auch in letzter Instanz immer um die Thätigkeit des Abkratzens und Abschabens handelte. Wir wissen nicht, was man mit diesen verschiedenen Schaberformen geschabt haben mag. Etwas anderes als entweder Holz oder Knochen, Fleisch und Haut wird kaum in Betracht kommen. Auf alle Fälle müssen wir aber aus dem Vorhandensein von zahllosen Schabern, die eins der verbreitetsten und wichtigsten Werkzeuge vorstellen, auf die Existenz anderer Culturerscheinungen schliessen, sei es auf die Bearbeitung von Holz zu Geräthen, sei es auf Jagdmethoden sowie auf die Zerlegung des Wildes und Gewinnung des Fleisches oder der Häute. Sehr wahrscheinlich ist beides zutreffend, indessen bleiben alle Speculationen darüber vorläufig müssig. In der Anpassung der Schabekante für bestimmte Zwecke des Schabens sehen wir aber zugleich die erste Andeutung der Formgebung überhaupt. Wer eine Reihe von Spitzschabern und eine Reihe von Hohlschabern vor sich sieht, kann an dieser ersten Absicht einer primitiven Formgebung nicht mehr zweifeln. Man nahm einen Abschlag und formte eine Partie des Randes durch Behauen in ganz specifischer Weise. Das Charakteristische bei dieser ersten Spur der Formgebung ist aber im Gegensatz zur Formgebung der palaeolithischen und jeder späteren Zeit, dass die Formgebung lediglich einen Nützlichkeitszweck verfolgte und sich daher nur auf die zum Gebrauch bestimmte Partie des Randes beschränkte. Jede Äusserung eines aesthetischen Sinnes bei der Herstellung der Werkzeuge, wie er sich bei uns durch unendlich lange fortgesetzte Gewöhnung entwickelt und befestigt hat und ganz unwillkürlich selbst in die Betrachtung der primitiven Werkzeuge fortwährend von selbst einmischt, fehlt in der miocänen Cultur noch vollständig. Es ist lediglich der Zweck, der die Form bestimmt. Daher hat das Werkzeug als Ganzes irgend eine beliebige zufällige Form. Absichtlich geformt ist nur die Partie, die einen bestimmten Zweck erfüllen soll. Das ist ein charakteristisches Moment für diese Culturstufe.

Schliesslich kommt bei der Bearbeitung der Feuersteinwerkzeuge in der Miocänzeit ausser der Gewinnung von Abschlägen und der Herstellung geeigneter Schabekanten noch eine dritte Absicht bisweilen zum Ausdruck, auf die ebenfalls Rutot schon hinwies, das ist *die Anpassung an die Hand* durch Wegschlagen spitzer und scharfer Vorsprünge und Kanten. In einzelnen Fällen ist diese Erscheinung an den stehen gebliebenen Resten sowie an der genau feststellbaren Richtung und Zahl der Schlagmarken so augenfällig zu erkennen, dass kein Zweifel an dieser Absicht entstehen kann.

Eine grosse Anzahl von Werkzeugen lässt, wie bereits bemerkt, an der verschieden starken Patinierung verschiedener Systeme von Schlagmarken deutlich erkennen, dass sie mehrmals und zwar zu verschiedenen Zeiten gebraucht wurde und zwischendurch wieder lange Zeit unbenutzt am Boden lag. Das legt den Schluss nahe, dass man die Werkzeuge nach dem Gebrauch nicht aufbewahrte. Darauf weist auch das verhältnissmässig seltene Vorkommen stark zerarbeiteter Hausteine und stärker angefrischter Schaber hin. *Man liess offenbar nach dem Gebrauch das Werkzeug einfach liegen.* Bei neuem Bedarf fand man ja immer wieder genügend Feuersteinmaterial, um sich leicht ein neues zu machen oder man nahm auch ein altes, schon gebrauchtes Werkzeug, das grade am Boden lag, auf, um es für den augenblicklichen Zweck von neuem zurecht zu schlagen. Durch eine solche Praxis würde auch die grosse Menge von Werkzeugen verständlich, die man auf kleinem Raume zusammen findet.

Die Herstellung grosser Instrumente mit deutlich herausgearbeiteter Spitze, die häufig keine deutlichen Gebrauchsspuren zeigt, deutet darauf hin, dass man damit weiches Material geschlagen oder gehackt hat. Es lässt sich nicht sagen, was das gewesen sein mag. Vielleicht hat man Holz oder Erde damit gehackt, vielleicht auch hat man diese Steine als Waffen gebraucht, denn nichts hindert uns, den Gebrauch von Waffen etwa zum Töten von Thieren bereits bei der miocänen Bevölkerung anzunehmen. Indessen das bleibt unbewiesen und ebenso bleibt uns der Zweck mancher anderer Werkzeuge vorläufig verschlossen. Soviel aber ist gewiss, dass die Existenz aller dieser ihrem Zweck nach noch nicht zu deutenden Geräthe uns zwingt, die Differenzierung der Culturverrichtungen bei der miocänen Bevölkerung noch höher anzusetzen als sie uns die sicher nachweisbaren Culturerscheinungen schon zeigen. Jedenfalls lehren uns die Thatsachen, dass wir uns auch bezüglich der miocänen Cultur vor dem Fehler hüten müssen, der in der Geschichte der praehistorischen Forschung so oft begangen wurde, so oft eine ältere Culturstufe entdeckt wurde, dass wir die Entwicklungshöhe der betreffenden Culturstufe zu tief einschätzen. Das tertiäre Alter der Cultur darf uns in diesem Falle unter keinen Umständen dazu verführen.

Ausser dem Feuerstein ist *kein anderes Steinmaterial zur Herstellung der Werkzeuge* benutzt worden. Diese äusserst zweckmässige Auswahl des passendsten Materials bei genügender Anwesenheit von anderem Steinmaterial zeigt bereits eine genaue Kenntniss der Eigenschaften der ver-

schiedenen Gesteinsarten und vor allem der grossen Vorzüge des Feuersteins. Wie sich aus den Untersuchungen Rutots mit aller Deutlichkeit ergieht, ist man in den älteren diluvialen und den tertiären Zeiten direkt dem Feuerstein nachgegangen und hat sich nur da aufgehalten, wo ausser den anderen Lebensbedingungen, wie Nahrung und Wasser, auch Feuerstein vorhanden war.

Noch nicht mit Sicherheit zu beantworten ist dagegen die Frage, ob die tertiäre Bevölkerung des Cantal ausser Stein auch anderes Material zu Werkzeugen, Geräthen, Waffen verarbeitete. Das ganz überwiegende Vorherrschen der Schaber und Kratzer unter den Steinwerkzeugen erregt allerdings den Verdacht, dass das der Fall war, und auch aus anderen Gründen wird man wohl annehmen dürfen, dass wenigstens Holz, d. h. Zweige, vielleicht auch andere Pflanzentheile wie Binsen, Schilf, Gras, Bast etc. in primitiver Weise verwendet wurden. Im Falle der Kenntniss der Fleischnahrung würde auch an die Häute der erlegten Thiere zu denken sein. Sogar die Verwendung von Knochen halte ich durchaus nicht für ausgeschlossen. Für die mir seit langen Jahren aus eigener Erfahrung bekannte Culturstufe von Taubach, die dem „Mafflien" Rutots angehört, habe ich mich selbst durch Prüfung der im Roemer-Museum zu Hildesheim und im Germanischen Museum zu Jena befindlichen gesicherten Funde überzeugt, dass die damalige Bevölkerung bereits Thiere zu Nahrungszwecken erlegte, im Feuer zubereitete und ihre Knochen zu primitiven Geräthen benutzte. Ich sehe keinen Grund, der dagegen spräche, dass in einer früheren tertiären Cultur, die, soweit wir nach den Feuersteinwerkzeugen urtheilen können, nicht wesentlich tiefer stand, als die altdiluviale von Taubach, die gleiche Praxis bereits bestanden hätte. Indessen das bleibt vorläufig eine blosse Möglichkeit.

Noch eine Fülle von anderen Fragen, die uns auf den Lippen schweben, muss vorläufig unbeantwortet bleiben. Wie verhielt es sich mit der Wohnung, mit der Kleidung, mit dem Zusammenleben, mit der Sprache und vielem anderen? In allen diesen Fragen fehlt uns bisher jeglicher Anhaltspunkt und alles Speculieren darüber bleibt werthlos.

Nur bezüglich der Frage nach der somatischen Beschaffenheit der miocänen Bewohner des Cantal möchte ich mir noch ein paar Bemerkungen gestatten. Ich habe schon oben (pag. 32) darauf hingewiesen, dass die Mortillet-sche Schlussfolgerung aus den Geräthen auf die geringe Körpergrösse ihrer Hersteller völlig hinfällig ist, weil die Voraussetzung einer besonderen Kleinheit der Werkzeuge nicht zutrifft. Ich möchte im Gegentheil mit grösster Wahrscheinlichkeit aus der Beschaffenheit der Feuersteinwerkzeuge auf eine im wesentlichen der unsrigen gleiche Grösse und Form der Hand und damit des übrigen Körpers schliessen. Die Existenz grosser, unsere ganze Hand füllender Schaber und Hacken, vor allem aber die vollkommene Handgerechtigkeit, welche fast alle Werkzeuge auch für unsere Hand besitzen, scheint mir diesen Schluss in hohem Grade zu rechtfertigen. Die Werkzeuge der verschiedensten Grösse, deren Benutzungsseite und

Handlage sich aus den Gebrauchsspuren bisweilen mit völliger Klarheit ergiebt, liegen zum grössten Theil so vorzüglich und bequem in unserer Hand, die ursprünglich vorhandenen scharfen Spitzen und schneidenden Kanten sind an den für unsere heutige Handlage nothwendigen Stellen bisweilen in so zweckmässiger Weise entfernt, dass man glauben könnte, die Werkzeuge wären direkt für unsere Hände gemacht.

Leider haben wir bisher keine Skelettreste von den miocänen Bewohnern des Cantal gefunden und so bleiben alle weiteren Speculationen über die somatischen Verhältnisse derselben ohne jede Grundlage. Mortillet hat in ihnen eine Zwischenform zwischen Menschen und Affen erblickt, die er als „Homosimius" bezeichnete. Aber was heisst das? Wenn es auch sehr wahrscheinlich ist, dass diese tertiären Formen den thierischen Ahnen des heutigen Menschen noch näher gestanden haben werden als die heutigen Menschen selbst, wer sagt uns, dass sie nicht schon die wesentlichen Charaktere des heutigen Menschen in ihrem Körperbau besassen, dass nicht die Entwicklung der specifisch menschlichen Charaktere weit hinter dem oberen Miocän zurückliegt? Vielleicht waren die miocänen Bewohner des Cantal schon so hoch entwickelt, dass wir ihnen unbedenklich den Titel „Mensch" zuertheilen könnten. Eine solche Annahme würde nicht mehr und nicht weniger Wahrscheinlichkeit haben als Mortillets Annahme einer neutralen Zwischenform. Auf der andern Seite was würde uns hindern, in diesen tertiären Wesen eine Nebenlinie der direkten Vorfahrenreihe des Menschen zu sehen? Alles das sind Möglichkeiten, die sich vorläufig weder beweisen noch widerlegen lassen, aus dem einfachen Grunde, weil wir garkeine Berechtigung haben, eine bestimmte Culturstufe auf eine bestimmte somatische Entwicklungsstufe zu beziehen. Solange wir keine somatischen Reste der tertiären Bewohner des Cantal finden, solange bleibt alle Speculation über ihre systematische Stellung ganz ohne Bedeutung. Aus demselben Grunde ist auch jede Verknüpfung mit dem Pithecanthropus von Trinil ohne Werth. Vom einen kennen wir nur die Cultur aber keine somatischen Reste, vom andern nur einen somatischen Rest aber keine Spur seiner Cultur. Es bleibt immer eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Dabei kommt nichts heraus. Wir brauchen Geduld und mehr Material.

Halten wir uns also zunächst an das Erfahrungsmaterial bezüglich der Cultur. Dann können wir die eine wichtige Thatsache feststellen, dass die miocäne Bevölkerung des Cantal eine Cultur besass, die unmöglich den Anfang der menschlichen Culturentwicklung gebildet haben kann. Die Auswahl des besten Steinmaterials, die Kenntniss der künstlichen Spaltung und Randbearbeitung des Feuersteins, die Differenzierung specifischer Werkzeugtypen für specielle Zwecke, der Beginn einer zweckmässigen Formgebung der für den Gebrauch bestimmten Kanten, das alles sind Culturerscheinungen, die bereits eine lange Reihe von Erfahrungen voraussetzen.

Berücksichtigt man nun die sehr auffallende und bedeutsame Thatsache, dass die Feuersteintechnik vom Ende des Miocän durch das ganze Pliocän

und das untere Diluvium hindurch unverändert geblieben ist und erst mit dem jüngeren Abschnitt des Diluviums, der durch das Auftreten des Mammuth charakterisiert ist, also im „Strépyien“ und „Chelléen“ eine Weiterentwicklung erfahren hat, so wird man zu dem Schluss gedrängt, dass die Culturfortschritte in jenen entlegenen Zeiten sich äusserst langsam vollzogen haben. Dadurch rücken aber die ersten Anfänge der Cultur weit unter das obere Miocän zurück, zum mindesten bis ins ältere Tertiär. Auf alle Fälle muss vor dem oberen Miocän eine vermuthlich sehr lange Culturperiode angenommen werden, in der man noch nicht verstand, den Stein zu spalten und zu bearbeiten, in der man sich als Werkzeug lediglich des Steines bediente, wie ihn die Natur lieferte. Auch in dieser Periode wird die Auswahl des Gesteinsmaterials und die Auswahl der Form des Steins für einen speciellen Zweck schon einen Entwicklungsfortschritt bedeuten. So zwingen uns unsere neuen Erfahrungen, die Anfänge der Cultur in immer grauere Ferne zurück zu verlegen.

Die Eintheilung der steinzeitlichen Culturstufen.

Im Hinblick auf die im vorigen Capitel festgestellten Thatsachen scheint es mir nothwendig, unser Eintheilungsschema der steinzeitlichen Culturstufen etwas weiter auszubauen.

Ich möchte dabei von vornherein gleich betonen, dass es sich hier nur um die Charakterisierung und Eintheilung der Culturstufen handeln soll, nicht um die Eintheilung der zeitlichen Perioden der Steinzeit. Das ist beides streng auseinander zu halten. Ich hebe das nur hervor, weil seit Mortillet beides vielfach durcheinander gemengt worden ist. Dadurch kann immer nur Confusion entstehen.

Es ist eins von den vielen Verdiensten Rutots, mit allem Nachdruck darauf hingewiesen zu haben, dass Zeitbestimmungen für die einzelnen steinzeitlichen Culturen immer nur auf Grund geologischer Kriterien getroffen werden können, niemals auf Grund der Typen von Culturgeräthen. Das ist ja auch ohne weiteres klar, denn in den verschiedenen Gegenden der Erde haben vielfach die gleichen Culturen zu ganz verschiedenen Zeiten bestanden. Es leben noch heute einzelne Völker mit rein steinzeitlicher Cultur.

Etwas ganz anderes ist es, wenn es sich darum handelt, eine bestimmte Culturstufe zu charakterisieren. In diesem Falle kommen geologische Verhältnisse garnicht in Betracht, sondern allein das Culturinventar. Diese beiden Dinge können wir nicht scharf genug auseinander halten, denn überall, wo sie vermischt werden, entsteht, wie die Geschichte der praehistorischen Forschung zeigt, immer nur wieder Verwirrung.

Hier möchte ich nur auf die Charakterisierung und Unterscheidung der steinzeitlichen Culturstufen eingehen.

Bis in die erste Hälfte des verflossenen Jahrhunderts kannte man nur eine einzige steinzeitliche Cultur. Erst die Entdeckungen von Boucher de Perthes gaben den Anstoss zur Unterscheidung von zwei Culturstufen in der Steinzeit, die bekanntlich von John Lubbock 1866 als „palaeolithische" und „neolithische" Periode bezeichnet wurden. Später ist diesen beiden noch eine „eolithische" Periode hinzugefügt worden und zwar zuerst von Mortillet, der Culturstufen und Zeitstufen vermischend damit die Periode der tertiären Culturen bezeichnete. In den letzten Jahren ist nun die Bezeichnung der „eolithischen" Periode sehr viel verwendet worden, aber wieder in anderem als dem ursprünglichen Sinne und auch nicht immer übereinstimmend. Von den englischen Forschern wurden als „Eolithen" die primitiven Feuersteinmanufacte des Kalkplateaus von Kent bezeichnet und Rutot hat diese Bezeichnung neuerdings auch in sein System der steinzeitlichen Culturstufen aufgenommen und auf die älteren diluvialen Werkzeuge ausgedehnt. Während aber die einen unter einem „Eolithen" einen Feuerstein verstehen, der nur Gebrauchs- aber keine Bearbeitungsspuren zeigt, schliessen andere, wie Rutot, in den Begriff „Eolith" ausserdem auch künstlich abgeschlagene und mit Randbearbeitung versehene Feuersteine mit ein und sehen das Charakteristische des „Eolithen" nur in dem Fehlen einer bestimmten Form. In dieser schwankenden Bezeichnungsweise liegt zweifellos ein Missstand.

Mir scheint nun, dass mit der Erfindung der künstlichen Feuersteinspaltung und Randbearbeitung ein ganz ausserordentlicher Culturfortschritt sich vollzogen hat gegenüber der Culturstufe, auf der man einfach die Steine als Werkzeuge verwendete, in der Form, wie die Natur sie bot. Eine Culturstufe, wie ich sie im vorstehenden Capitel bereits für das obere Miocän nachgewiesen habe, kann unmöglich das erste Morgenroth der Culturentwicklung repräsentieren. Eine solche Culturstufe setzt eine lange Entwicklung voraus, Stufen, auf denen die Erfahrungen über die Eigenschaften des verschiedenen Steinmaterials noch nicht gesammelt sind, auf denen man den Stein noch nicht bearbeitet, sondern einfach von der Erde aufnimmt und verwendet, wie man ihn findet. Ich halte es daher für unbedingt nothwendig, innerhalb der ungeheuer langen Culturentwicklung, die der palaeolithischen Cultur voraus geht, einen Schnitt zu machen da, wo die künstliche Bearbeitung des Feuersteins beginnt und den Ausdruck „eolithische" Cultur auf die Stufe zu beschränken, die vor dieser Erfindung liegt. Dann kann man die Stufe, die durch die Kenntnis der künstlichen Spaltung und Randbearbeitung bei noch fehlender Entwicklung einer Gesammtform des Werkzeuges ausgezeichnet ist, zweckmässig als „archaeolithische" Cultur zwischen eolithische und palaeolithische einschieben.

Danach möchte ich folgendes Schema einer Entwicklung der steinzeitlichen Culturen entwerfen, dem ich hier zunächst nur die Benutzungsweise des Steins zu Grunde lege ohne Rücksicht darauf, dass selbstverständlich daneben noch anderer Culturbesitz sich entwickelte.

Schema der Steinculturen.

Eolithische Cultur.	Der Stein wird als Geräth verwendet, wie ihn die Natur bietet, ohne irgendwelche künstliche Bearbeitung. Die Geräthe sind als solche nur an ihren Gebrauchsspuren kenntlich.
Archaeolithische Cultur.	Der Stein wird künstlich gespalten. Die Abschläge werden durch Randbearbeitung zu Geräthen, hauptsächlich zu Schabern hergerichtet, die nur am Gebrauchsrande die Andeutung einer ihrem speciellen Zweck entsprechenden Formgebung zeigen.
Palaeolithische Cultur.	Der Stein wird durch Spaltung, Rand- und Flächenbehauung zu conventionellen Geräthformen verarbeitet, welche die erste Andeutung eines aesthetischen Sinnes zum Ausdruck bringen.
Neolithische Cultur.	Der Stein wird durch Spalten, Behauen, Schleifen, Poliren und künstliche Durchbohrung zu Geräthen von vollendeter Formgebung verarbeitet

Es ist selbstverständlich, dass die niederen Werkzeugtypen sich auch in allen höheren Culturstufen als remanente Formen erhalten können. So finden wir z. B. eolithische Typen auch in archaeolithischen, palaeolithischen, neolithischen und noch höheren Culturen in Formen von Bebansteinen, Kornquetschern, Reibsteinen etc. Ich besitze aus einer Ansiedelung der Völkerwanderungszeit in der Nähe von Göttingen drei Steine von rein eolithischem Charakter, die zusammen neben einer Heerdgrube lagen. Sie dienten, wie aus ihren Gebrauchsspuren ganz unzweideutig hervorgeht, zum Schärfen der Sichel. Die Massenhaftigkeit von eolithischen Typen kann unter Umständen in einer höheren Culturstufe so gross sein, dass man fast eine eolithische Cultur vor sich zu haben glaubt. So kann z. B. in archaeolithischen Culturen die künstliche Spaltung des Feuersteins zur Gewinnung von Abschlägen überflüssig werden, weil an Ort und Stelle genug natürliche Bruchstücke mit scharfen Kanten vorhanden sind, wie das in Rutots „Rentelienstufe" der Fall ist. Dass es sich hier trotzdem um eine archaeolithische Cultur handelt, erkennt man dann nur an der Verwendung der Randbearbeitung. Im Uebrigen hat die ganze Cultur eolithischen Charakter. Ja, wir müssen sogar sagen, dass eine völlig reine eolithische Cultur bisher noch nicht einmal gefunden worden ist. Um solche zu suchen, müssen wir offenbar viel weiter zurückgehen in der Erdgeschichte als bisher, denn die älteste Cultur, die wir bis jetzt mit Sicherheit kennen, die Cultur des obersten Miocän ist bereits eine Cultur von sehr ausgesprochenem archaeolithischem Typus. Dass aber in der Entwicklungsgeschichte der menschlichen Cultur rein eolithische Culturen der archaeolithischen Stufe des oberen Miocän irgend wann einmal vorausgegangen sein müssen, das beweist nicht nur das Vorhandensein von remanenten eolithischen Typen in höheren Stufen, sondern auch die bekannte von Schweinfurth[1]) und Anderen beobachtete Thatsache, dass auch Affen gelegentlich

1) G. Schweinfurth: „Kieselartefacte in der diluvialen Schotter-Terrasse und auf den Plateau-Höhen von Theben." In Zeitschr. f. Ethnol. Bd. 34, Jahrg 1902, pag. 302.

Steine, wie sie die Natur ihnen bietet, als Werkzeuge zum Schlagen benutzen. Herr Prof. SCHWEINFURTH theilt mir auf meine Anfrage freundlichst mit, dass die von ihm beobachteten Paviane auf Granitblöcken sassen und auf diesen mit den massenhaft umherliegenden Klopfsteinen aus demselben Material ihre Fruchtkerne aufklopften. Uebrigens sei das eine allen Jägern, die in Afrika reisten, wohlbekannte Erscheinung. Hier haben wir also bei Affen eine rein eolithische Benutzungsweise des Steins, die noch nicht einmal zur Kenntniss und Auswahl des Feuersteins gelangt ist. Einen derartigen Ausgangspunkt werden wir auch für die Entwicklung der menschlichen Steincultur anzunehmen haben. Aber wenn wir diese ersten primitiven Stadien der Culturentwicklung finden wollen, dürfen wir nicht im oberen Tertiär oder gar im Diluvium danach suchen. Sie können nur in Schichten erwartet werden, die weit hinter dem oberen Miocän zurückliegen. Freilich wird es, je weiter wir zu den wirklichen Anfängen der Culturentwicklung hinabsteigen, um so schwieriger die Spuren des Gebrauchs an den Werkzeugsteinen zu erkennen, denn sie werden nur schwach sein, da die Steine bei der Massenhaftigheit des Materials kaum lange genug gebraucht sein werden, um stärkere Abnutzungsspuren zu tragen. Immerhin dürfen wir erwarten, dass sich auch in Bezug auf diese feinsten Zeichen der Werkzeugnatur unser Blick noch wesentlich schärfen wird, wie es ja auch erforderlich war für die Entdeckung und Anerkennung der spättertiären und altdiluvialen Feuersteingeräthe. Erkennen wir ja doch auch hier die Werkzeuge von rein eolithischem Charakter schon heute allein an ihren Gebrauchsspuren. Jedenfalls ist es unsere Aufgabe in Zukunft das Augenmerk mehr auf die unter dem obersten Miocän gelegenen Landablagerungen zu richten, die unter Bedingungen entstanden, welche die Existenz menschenähnlicher Wesen gestatteten. Will es der Zufall, so finden wir auch somatische Reste.

Tafelerklärung.

Die Figuren auf den folgenden Tafeln sind sämmtlich Reproduktionen von photographischen Aufnahmen in natürlicher Grösse. Wer jemals versucht hat primitive Feuersteinwerkzeuge, an denen nicht die Gesammtform, sondern die kleinen Einzelheiten das wesentliche Moment bilden, photographisch darzustellen, wird wissen, mit welchen Schwierigkeiten das verbunden ist und wie man vielfach überhaupt auf die Wiedergabe von einzelnen Erscheinungen verzichten muss, wenn man nicht endlose und unübersichtliche Reihen von Aufnahmen desselben Objekts in verschiedener Lage reproducieren will. Ich bin daher meinem Freunde und Collegen Prof. Kallius zu ganz besonderem Dank verpflichtet, dass er mir seine Zeit und Mühe geopfert hat, um mich bei diesen photographischen Aufnahmen zu unterstützen. Die Photographie habe ich zur Darstellung der Objekte auf den Tafeln gewählt, weil ich jede subjective Beeinflussung der wirklichen Verhältnisse durch Abzeichnen oder Hervorheben des Wichtigen und Weglassen des Nebensächlichen vermeiden wollte. Die Figuren sind sämmtlich unretouchiert wiedergegeben worden, wie der photographische Apparat sie sah. Einzelne Typen von Objekten habe ich im Text als Zinkätzungen noch einmal reproduciert. Auch diese Figuren sind wie die Tafelfiguren sämmtlich in natürlicher Grösse.

Tafel I.

Zwölf mittelgrosse und kleinere Abschläge von der Vorderseite (a) und Rückseite (b). Die Vorderseite zeigt ausnahmslos die sehr deutliche Schlagbeule (Bulbus), zum Theil auch die Schlagnarbe (Fig. 3, 8, 11, 12), die Rückseite fast überall deutlich die Schlagmarken früherer Abschläge. No. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12 stammt vom Puy de Boudien, No. 8 von Veyrac, No. 11 von Belbex.

Tafel II.

Fünf grössere und mittelgrosse Abschläge ebenso, sämmtlich vom Puy de Boudien.

Tafel III.

Gradschaber, die sämmtlich aus Abschlägen hergestellt sind. a Vorderseite, b Rückseite, c Schabekante.

Fig. 1. Ein Abschlag mit starker Schlagbenle, dessen breite Kante als Schabekante gedient hat und sehr deutlich (c) die sämmtlich nach derselben Seite gerichteten Spuren der Gebrauchsabnutzung zeigt, während die Schmalseiten haarscharf sind ohne jede Ausschartnng. Auf der Rückseite (b) sind die Schlagmarken von 5 vorhergehenden Abschlägen zn sehen, die sämmtlich in der gleichen Richtnng abgespalten sind, nnd an der Schabekante noch ein Stück der Rinde.

Fig. 3. Ein grosser dicker Abschlag mit Schlagbeule (a). Die Schmalseiten sind völlig scharf und ohne jede Ausschartung, die breite Kante nnten ist durch zahllose ausnahmslos in gleicher Richtung aufgesetzte Schläge von ihrer Rinde befreit worden und zeigt ausser der Bearbeitnng anch Gebrauchsabnntznng. Bei c ist im unteren Abschnitt noch der Rest der Rinde erkennbar. Anf der Rückseite (b) erscheinen die Schlagmarken von 5 vorhergehenden Abschlägen sowie links oben Splitterbrüche.

Fig. 4. Ein grösserer Abschlag, von dem die Schlagbeule abgeschlagen ist, der aber, wie die Rückseite (b) zeigt, an zwei bei der Spitze zusammenstossenden Rändern durch zahlreiche gleichgerichtete Schläge zum Schaben bearbeitet ist und Gebrauchsspuren aufweist. Ausserdem ist auf der Rückseite durch zahlreiche Schläge eine über die Fläche nach oben steigende Gratkante entfernt und abgestumpft worden. Deutliches Beispiel der Handanpassung. Das Stück könnte anch als Spitzschaber gedient haben.

Fig. 2. Ein Abschlag, dessen breite Kante durch einseitig gerichtete Schläge bearbeitet ist und Gebrauchsspuren zeigt (c). Die eine Schmalseite (a links, b rechts) ist ebenfalls durch einseitige Randbearbeitung zn einem flachen Hohlschaber umgeformt worden, so dass das Stück zngleich Gradschaber und Hohlschaber vorstellt.

Tafel IV.

Spitzenschaber nnd Hohlschaber.

Fig. 1. Spitzschaber, der aus einem Abschlag mit parallelen Flächen durch Herausarbeiten der Spitze mittels zahlreicher gleichgerichteter Schläge hergestellt ist. Von beiden Flächen (a und b) dargestellt, nm die einseitige Bearbeitung kenntlich zn machen.

Fig. 2. Desgleichen mit kürzerer Spitze.

Fig. 3. Desgleichen mit schärferer Spitze.

Fig. 4. Grosser ans einer natürlichen Platte hergestellter Spitzschaber, der vielleicht anch als Hacke gedient haben mag, mit sehr deutlich durch zahlreiche gleichgerichtete Schläge herausgearbeiteter Spitze.

Fig. 5. Flacher Hohlschaber a von vorn, b von hinten gesehen, der aus einem Abschlag durch einseitige Bearbeitung des einen Randes (bei a links, bei b rechts) hergestellt ist.

Fig. 6. Hohlschaber a von vorn, b von hinten. Ebenfalls aus einem Abschlag gemacht.

Fig. 7. Hohlschaber mit sehr stark concaver Schabekante. Ebenfalls aus einem Abschlag hergestellt. a von vorn (deutliche Schlagbeule), b von hinten.

Fig. 8. Desgleichen.

Fig. 9. Schaber mit unregelmässiger Schabekante. Ebenfalls aus einem Abschlag mit deutlicher Schlagbeule (a) hergestellt, der auf der Rückseite noch die Rinde trägt, die nur an der Schabekante durch zahlreiche Schläge von der Vorderseite her entfernt ist.

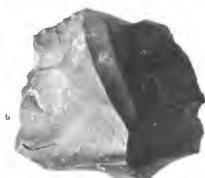
Tafel V.

Fig. 1. Grösseres spitzes Instrument zum Hauen oder Hacken, das aus einer natürlichen Platte hergestellt ist. Die Spitze ist durch sorgfältiges Behauen mit zahllosen gleichseitig gerichteten Schlägen herausgearbeitet worden, wie die Vorderansicht (b) der Spitze zeigt.

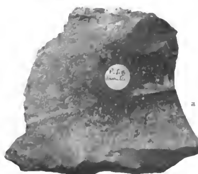
Fig. 2. Grösserer Schaber, der durch einseitige Behauung fast des ganzen Umfangs hergestellt ist.

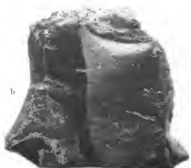
1


a


b

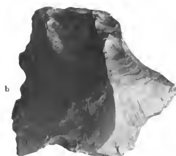
2


a


b

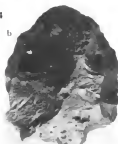
3


a

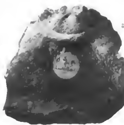

b

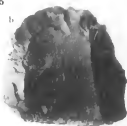
4


a


b

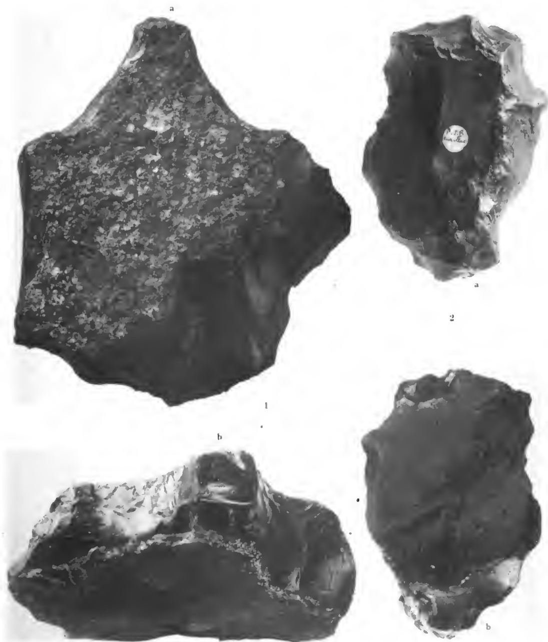
5


a


b

Weidmannsche Buchhandlung, Berlin. Lichtdruck von A. Frisch, Berlin W. 35.


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA



Weidmannsche Buchhandlung, Berlin. Lichtdruck von A. Frisch, Berlin W. 35.



ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND IV. Nro. 5.

Vermessung der Umgebung des Orionnebels.

Von

Dr. Br. Meyermann.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1906.

Vermessung der Umgebung des Orionnebels.

Von

Dr. Br. Meyermann.

Mit einer Tafel.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Januar 1906.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Ausmessung der relativen Lage der Sterne bis 8.5 Grösse im Gebiete des Orionnebels. Die Tatsache, dass in unmittelbarer Nähe grosser Nebel häufig ein auffallender Sternenmangel herrscht, legt die Vermutung nahe, dass dieser Erscheinung ein tieferer ursächlicher Zusammenhang zu Grunde liegt. Zur Aufklärung der Frage wird namentlich das Studium der Eigenbewegungen dienen können und hierfür soll in Bezug auf den Orionnebel die nachfolgende Arbeit einen Beitrag liefern. Da die Lösung der Aufgabe nur von der Beobachtung einer grossen Anzahl schwacher über das Nebelgebiet zerstreuter Sterne zu erwarten ist, so wird sich dieselbe schliesslich nur durch Ausmessung photographischer Aufnahmen erreichen lassen. Meiner Arbeit liegt die Absicht zu Grunde, für ein solches Vorhaben eine grössere Anzahl von Fixpunkten zu liefern, an welche auf der Platte die schwächeren Sterne angeschlossen werden können. Eine solche ausgedehnte Vermessung würde vielleicht schon jetzt einen Ueberblick geben können über die vorhandenen Eigenbewegungen, denn es existiert bereits eine Vermessung der Sterne bis 15. Grösse, die sich über das ganze Gebiet des Nebels erstreckt, von G. P. Bond in den Annalen des Harvard College Observatoriums Band V. Es finden sich dort von 1101 Sternen die α- und δ-Differenzen gegen den Centralstern Θ Orionis. Die Messungen sind angestellt worden in Zonen von je 10′ Breite. Bei feststehendem Refraktor wurden die α-Differenzen durch die Sterndurchgänge durch feste Fäden, die δ-Differenzen durch Schätzen mit Hülfe einer feinen Glasskala im Gesichtsfelde bestimmt. Durch das Zusammensetzen der vielen Zonen leidet zwar die Genauigkeit der schliesslich sich ergebenden α- und δ-Differenzen gegen den Centralstern, doch könnten diese trotzdem schon zu einem gewissen Urteil über Eigenbewegungen führen, wenn sie mit neuen exakten Messungen verglichen würden. Pickering hat in seiner Bearbeitung des Orionnebels (Annl. des Har-

vard Col. Obs. Bd. 32) dem Verzeichnisse Bonds noch 146 weitere Sterne hinzugefügt, deren Positionen jedoch nicht auf mikrometrischen Messungen beruhen. Bezüglich der Sterne im centralen Gebiete des Nebels sei erinnert an die Sternverzeichnisse von J. Herschel (Results of astr. obs. made 1834—38 at the Cape of good Hope, London 1847), Lassell (Mem. of the astr. Society, London XXIII), Liapunow-Struve (Observations de la grande nébuleuse d'Orion, Petersburg 1862).

Ueber die Göttinger Messungen sei schon hier erwähnt, dass sie im allgemeinen unter ungünstigen Verhältnissen stattgefunden haben. Die mittlere Declination von $-5^{0}.5$ beschränkt für unsere Breite den Stundenwinkel und damit den Teil des Jahres, in dem überhaupt gemessen werden kann, schon wesentlich. Da ausserdem die letzten Winter ausserordentlich wenig Beobachtungsnächte aufwiesen, und ich die Arbeit möglichst schnell abschliessen wollte, war ich gezwungen, oft auch bei zweifelhaftem Wetter zu messen, um im Beobachtungsmaterial keine Lücken übrig zu behalten. Auch die Zahl der Beobachtungen in einer Nacht ist dadurch oft grösser geworden, als dies mit Rücksicht auf die eintretende Ermüdung unter normalen Verhältnissen hätte geschehen dürfen. Es ist dies besonders in der Beobachtungsperiode 1903/04 der Fall, in deren erster Hälfte von September bis Dezember 22 nur 2 Abende brauchbar waren. In den wenigen dann folgenden klaren Nächten habe ich meist 20—30 und mehr Distanzen gemessen.

Die Zahlen zur Angabe der Bild-Ruhe und Schärfe werden wahrscheinlich nicht ohne weiteres mit den üblichen zu vergleichen sein, da sie wohl stark subjektiv beeinflusst sind durch die Lage der Dinge, und ich jedenfalls daher leichter geneigt war, die Bilder als genügend (3) anzusehen, als ich es in einem andern Falle getan hätte.

Die Messungen selbst sind nach dem an der hiesigen Sternwarte stets benutzten Verfahren angestellt. Bezüglich des Näheren verweise ich auf das von Schur in den Mitteilungen der Sternwarte Bnd. IV S. 3—14 gesagte.

Im Folgenden beginne ich mit den Beobachtungen, die zur Ableitung der Reduktions-Konstanten gemacht worden sind, und zwar erstrecken sich diese Untersuchungen auf:

1) Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur.
2) „ „ Distanzmessungen von den Aenderungen der Ocularstellung.
3) „ „ Distanzmessungen von der Temperatur.
4) Systematische Correktionen der Messungen.
5) Ableitung des definitiven Skalenwertes.

Darauf folgen dann:

6) Die Messungen der Oriondistanzen.
7) Die Ableitung der Sternpositionen.
8) Der Vergleich mit früheren Beobachtungen.

I. Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur.

Die Ableitung der Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur geschah in der gleichen Weise, wie sie bisher nach Verabredung zwischen Professor Schur und Ambronn am hiesigen Heliometer ausgeführt wurde. Es wird durch symmetrisch ausgeführtes Hinein- und Herausschrauben des Ocularstutzens auf geeignet enge Doppelsterne focusiert bei sehr verschiedenen Temperaturen, und die betreffende Ocularstellung an der Auszugskala abgelesen. Diese Ablesungen geben nur dann die Verschiebungen der Focalebene gegen den Index der Auszugskala, wenn das System Auge-Ocular für alle Temperaturen als unveränderlich betrachtet werden kann. Es wäre für mich wahrscheinlich ratsamer gewesen, eine feste Marke im Gesichtsfelde anzubringen und auf diese zuerst das Ocular zu focusieren. Denn die bekannten Bedenken gegen das obige Verfahren fallen bei mir besonders ins Gewicht infolge einer grossen Accommodationsfähigkeit des Auges, durch welche die deutliche Sehweite des letzteren wahrscheinlich in besonderem Masse unkontrolierbaren persönlichen Einflüssen unterworfen ist. Da mir dies jedoch erst auffiel, nachdem ein Teil der Beobachtungen fertiggestellt war, bin ich bei dem begonnenen Verfahren geblieben, um einen Wechsel innerhalb der Beobachtungsreihe selbst zu vermeiden.

Die Temperatur des Heliometers wurde bestimmt durch 3 Thermometer, von denen sich das eine (0) in unmittelbarer Berührung mit den Metallteilen des Objektivkopfes, das zweite (o) am Ocularende, gegen die strahlende Wärme des Beobachters durch eine Metallhülse geschützt, und das dritte J am oberen Ende der Instrumentensäule befindet. Die an ihnen abgelesenen Temperaturen wurden in der Weise zum Mittel vereinigt, dass 0 das Gewicht 4, o und J je das Gewicht 1 erhielten. Auf diese Weise ist die vor allen Dingen wesentliche Temperatur des Objektives hinreichend berücksichtigt. Im übrigen ist im vorliegenden Falle die Art der Mittelbildung von nicht sehr grossem Einfluss auf das Mittel, da es sich um Nachtbeobachtungen handelt, bei denen die Unterschiede in den Angaben der Thermometer nicht die grossen Werte erreichen, wie sie z. B. bei Sonnenbeobachtungen die Regel bilden.

In folgender Zusammenstellung gebe ich die ausgeführten Focusbestimmungen wieder. In der Rubrik: Focus steht das Mittel aus je 10 Einstellungen, unter Temperatur das Mittel der, wie oben angegeben, gefundenen Temperaturen zu Anfang und zu Ende einer jeden Beobachtungsreihe.

Focusierungen auf Doppelsterne.

Datum	Stern	Temperatur	Focus	Bildgüte R.	Bildgüte S.	Datum	Stern	Temperatur	Focus	Bildgüte R.	Bildgüte S.
1902 Oct. 22	ζ Aquar.	+ 7.1	21.58	3	3	Mai 27[2])	ζ urs min.	+ 15.1	(21.62)	4	4
22	ε Ariet.	+ 6.1	21.56	3	3	Juni 25	λ Ophi.	+ 16.8	21.84	3	3
23	ζ Aquar.	+ 6.0	21.68	3	3	Juli 11	221 Ceph.	+ 18.6	21.83	3	3
23	ε Ariet.	+ 5.7	21.56	3	3	Sept. 6	π Aquil.	+ 21.9	22.03	3	3
29	12 Lync.	+ 8.3	21.69	3	3	Oct. 20	ε Ariet.	+ 5.6	21.62	2-3	2-3
31	ε Ariet.	+ 6.4	21.60	4	4	23	ε Ariet.	+ 8.4	21.52	1-2	1-2
Nov. 16	ζ Aquar.	+ 4.2	21.68	3-4	3-4	Dez. 30	42 Ceti.	— 4.1	21.39	3	3
17	12 Lync?	+ 1.0	21.50	3	3	1904 Jan. 2	42 Ceti	— 2.5	21.46	3-4	3-4
18	12 Lync.	— 4.2	21.59	3	3	März 15	12 Lync.	— 0.2	21.41	2	2
20 [1])	5 Lyrae.	— 2.3	(21.79)	3	3	16	12 Lync.	+ 0.7	21.37	3	3-4
21	5 Lyrae.	— 2.4	21.55	2	1	20	Σ 941	+ 6.9	21.55	3	3
21	ε Ariet.	— 6.5	21.42	2-3	2-3	28	Σ 941	+ 6.5	21.72	3	3
Dez. 9	ε Ariet.	— 7.4	21.22	3	2-3	Juni 13	70 p Ophi.	+ 17.4	21.97	3	3
13	ε Ariet.	— 6.0	21.31	2	2	13	70 p Ophi.	+ 17.1	21.84	3	3
1903 Jan. 13	ε Ariet.	— 4.3	21.40	3	3	14	70 p Ophi.	+ 19.6	22.05	3	3
16	ε Ariet.	— 2.2	21.38	3-4	3-4	14	70 p Ophi.	+ 19.8	21.98	3	3
16	ε Ariet	— 3.2	21.34	3	3	29	λ Ophi.	+ 11.7	21.75	3	3
31	ζ Cancri	+ 1.3	21.51	3	3	29	λ Ophi.	+ 11.2	21.96	3	3
März 10	ζ Cancri	+ 2.0	21.54	3	3						
13	ζ Cancri	+ 3.2	21.57	3	2-3						

Die Bestimmungen erstrecken sich über ein Temperaturintervall von fast 30°.

Schliesst man an die beobachteten Ablesungen N_t nach der Methode der kleinsten Quadrate die Formel an:

$$N_t = N_0 + c \cdot t$$

wobei N_0 die Ablesung bei 0°, c den Temperaturcoefficienten der Ocularstellung für 1° bedeutet, so erhält man:

$$N_0 = 21.497 \pm 0.017 \text{ m. F,}$$

und

$$c = 0.0236 \pm 0.0017 \text{ m. F.}$$

Die entsprechenden Ausdrücke lauten bei Schur:

$$N_0 = 21.18 \pm 0.02$$
$$c = +0.0192 \pm 0.0018$$

bei Ambronn:

$$N_0 = 21.40 \pm 0.02$$
$$c = +0.0252 \pm 0.0012$$

1) Nov. 20. kurz nach dem Oeffnen.

2) Mai 27. Stern nur wegen seiner grossen Distanz zu trennen, sonst heute focusieren unmöglich (beide Focusierungen sind bei der Ausgleichung nicht mit verwertet).

Da die Kurzsichtigkeit der drei Beobachter bekannt ist, lassen sich die bezüglichen Normalstellungen in solche für ein normales Auge umrechnen. Die Brennweite des Oculars ist etwa 1 cm. Nach einem beim Heliometer gefundenen Kneifer Schurs benutzte dieser für das rechte Auge ein Glas von 4.25 Dioptrien, Professor Ambronn gebraucht ein solches von 2.0 und ich von 1.25 Dioptrien. Hiermit ergeben sich für die drei Beobachter die Correctionen an obigen Normalstellungen auf normales Auge zu:

$$\begin{aligned} \text{Schur} &= +0.4 \\ \text{Ambronn} &= +0.2 \\ \text{Meyermann} &= +0.1 \end{aligned}$$

In zufällig völliger Uebereinstimmung würde sich hieraus die Ocularstellung für ein normalsichtiges Auge zu 21.60 ergeben.

Es geht hieraus hervor, dass alle drei Beobachter bei 0° etwa auf den gleichen Punkt des Lichtkegels eingestellt haben. Auffallend ist die Differenz der Coefficienten c, welche sich erklären liesse durch

1) eine Abhängigkeit der Augen der Beobachter von der Temperatur,

2) Aenderungen in der Konstitution des Strahlenbüschels mit der Temperatur, die so gross wären, dass einer verschiedenen Auffassung derselben durch die verschiedenen Beobachter genügend Raum gegeben wäre.

Zu 1) möchte ich bemerken, dass ich eine solche Abhängigkeit für sehr gut möglich halte. In welcher Weise ein Auge von der Temperatur beeinflusst wird, lässt sich hier nicht entscheiden, doch kann man sich denken, dass die nur wenig durch direkte Blutcirkulation temperierte Hornhaut in ihren optischen Eigenschaften abhängig ist von der Temperatur der Aussenluft, und dass ferner die Grenzen der Accommodationsfähigkeit nach einer oder nach beiden Seiten hin beeinflusst werden.

Bezüglich 2) verweise ich auf das im Abschnitte III zu sagende.

II. Abhängigkeit der Distanzmessungen von der Aenderung der Ocularstellung.

Ist eine Distanzmessung ausgeführt bei der Temperatur t und mit der Ocularstellung 0 statt mit der dieser Temperatur entsprechenden Normalstellung N_t, so ist die Distanz zu reduzieren wegen der Differenz $N_t - O$ und zwar nach dem Ausdrucke:

$$F(N_t - O)\frac{S}{100} \quad .$$

wo $F = \frac{1}{f}$ die reciproke Brennweite des Heliometers und S die gemessene

Distanz bedeutet. Derselbe ergibt sich unmittelbar aus der Annahme, dass die Ebene, in der man misst, stets in derselben Entfernung vor dem Ocular liegt. Dieser Ausdruck stimmt im allgemeinen mit dem aus direkten Messungen gefundenen nicht überein in sofern, als der Faktor F von dem theoretischen durch die reciproke Brennweite gegebenen Werte abweicht. Wir wollen statt F den Wert Fz, wo z eine von 1 wenig verschiedene Grösse sein wird, setzen. Man bestimmt z in der Weise, dass man eine grosse Distanz misst in zwei Ocularstellungen, die möglichst weit vor und hinter der Normalstellung liegen. Man kann einigermassen voraussagen, wie der Faktor z ausfallen wird. Geht man nur 1 mm aus der Normalstellung heraus, so ist das Sternbild bereits wesentlich geändert. Sicherlich wird das Auge unwillkürlich versuchen, nach der Seite des scharfen Bildes hin zu accommodieren. Es wird die Differenz der abgelesenen Ocularstellungen $O_1 - O_2$ wesentlich grösser ausfallen als die Distanz der Ebenen, in denen die Messungen vorgenommen sind, d. h. es wird sich der Coefficient aus den Messungen kleiner als 1. ergeben. In der Tat ergibt sich:

für Schur $z = 0.960$

für Ambronn $z = 0.895$

Die so gefundenen Coefficienten werden bei der Reduktion allgemein angewendet, doch kann es zweifelhaft sein, ob ihre Anwendung bei den kleinen Abweichungen $N - O$, wie sie die Regel bei den eigentlichen Beobachtungen bilden, gerechtfertigt ist. Nimmt man an, dass der schärfste Punkt im Strahlenbüschel gut definiert ist, so wird sich ein normal accommodierendes Auge bei kleinen Abweichungen des Okulars von der Normalstellung noch fast ganz auf diesen Punkt einstellen, eine Reduktion wäre dann überhaupt unangebracht. Im vorliegenden Falle würde z. B. das Auge bei Abweichungen bis 0.1 mm aus der Normalstellung nur zu Accommodationen gezwungen werden, wie sie durch Brillengläser bis zu 1. Dioptrie veranlasst würden. Andererseits ist es auch denkbar, dass das Auge innerhalb eines Teiles des durch die sphärische Abweichung des Objektivs gegebenen Spielraums in seiner Ruhestellung verbleibt und nicht nach einer Normalstellung hin zu accommodieren versucht. In diesem Falle wäre der Faktor 1 anzuwenden.

Ich habe den Faktor an 7 Abenden durch Messungen des Polbogens bestimmt. Hierbei bin ich jedoch nur 0.7 bis 0.8 mm aus der Normalstellung gegangen, die Grenze, an welcher die Bilder anfingen sich zu verändern, und habe während der Messungen auf Kosten der Genauigkeit derselben das Auge nicht besonders angestrengt auf die Sterne focusiert. Es ergibt sich aus den unten (S. 9—10) mit angeführten und durch ein Ausrufungszeichen hervorgehobenen Messungen der zur Reduktion verwendete Faktor $z = 1.026$.

III. Abhängigkeit der Distanzmessungen von der Temperatur.

Zur Ableitung dieses Temperaturcoefficienten wurden wie üblich Messungen des zu allen Jahreszeiten zugänglichen Polbogens verwendet.

Die Messungen des Polbogens.

Datum	Sternzeit	Barom. und Lufttemp.	J	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ	Red. Distanz	Bildgüte R.	Bildgüte S.
	h								
1902 Oct. 29	2 17	748.5 + 0,9	+ 3.6	21.60	169.4134	+ 490	169.4624	3	3
31	0 28	749.0 + 3.5	+ 6.2	21.60	3966	544	4510	3	3
Nov. 5	22 6	747.0 + 4.7	+ 6.2	21 60	3977	650	4627	3	3
17	22 9	758.3 — 4.3	— 0.6	21.60	3913	550	4463	3	3
18	21 41	755.2 — 6 5	— 3.5	21.50	3043	630	4573	3	3
20	23 3	752.2 — 6.9	— 2.6	21.80	4063	335	4396	3	3
21	21 38	752.2 — 6.5	— 2.6	21.55	3788	611	4399	2	1
Dez. 5	22 40	756.8 — 16.7	— 11.3	21.41	3996	490	4486	3	4
5	4 3	756.8 — 19 6	— 15.7	21.41	3800	571	4371	3	3
13	4 14	755.4 — 7.5	— 6.0	21.40	3725	703	4428	2-3	1-2
1903 Jan. 13	2 22	756 6 — 6.2	— 3.9	21.40	3952	665	4617	3	3
16	1 56	760.2 — 4.1	— 2.5	21.46	3983	572	4555	2	1-2
Febr. 16	6 52	763.0 — 0.5	+ 1.1	21.50	4058	627	4685	2	2
26	10 5	759.9 + 2.4	+ 4.4	21.60	4189	508	4697	3	3
März 13	9 30	749.6 + 0.7	+ 3.2	21.60	4126	516	4642	2-3	2-3
14	9 14	749.7 + 0.6	+ 3.5	21.60	4132	547	4680	3	3
22	10 52	751.8 + 9.4	+ 10.6	21.80	4413	394	4807	3	3
25	9 19	743.4 + 10.5	+ 13.2	21.90	4289	473	4762	3	3
Mai 7	15 13	744.2 + 6.7	+ 9 0	21.80	4253	463	4716	3	3
23	15 27	754.3 + 15.0	+ 16.2	21.90	4375	542	4917	3	3
27	14 7	749.6 + 13.3	+ 16.0	22.00 ?	3921	389	4310	3	3
28	15 31	746.4 + 18.2	+ 19.5	22.00	4541	560	5101	3	3
29	15 29	744 0 + 16.5	+ 21.3	22 00	4521	588	5109	3	2
30	14 43	742.9 + 18.3	+ 21.0	22.00	4575	526	5101	3	3-4
Juni 6	16 9	753.0 + 7.6	+ 13.3	21.80	4376	622	5000	3	3
9	16 4	744.1 + 16.3	+ 17.6	21 90	4266	649	4915	2-3	2-3
28	16 43	752.3 + 17.3	+ 21.8	21.80	4336	836	5172	3	3
Sept. 6	22 29	748.5 + 18.0	+ 20.3	22.00	4472	554	5026	2-3	2-3
Dez. 3	3 38	749.6 — 4.6	— 3.7	21.40	3834	687	4521	3	3
1904 Jan. 2	0 35	751 8 — 5.5	— 2.5	21.45	3923	463	4386	3-4	2-3
März 17	7 56	744.1 + 4 3	+ 4.4	21.55	4248	662	4910	3	3
26	9 14	748 6 + 7.5	+ 7.5	20.90 !	3789	526	4315 !	3	3
26	9 19	748.6 + 7.5	+ 7.5	21.70 !	4366	526	4892	3	3
26	9 22	748.6 + 7.5	+ 7.5	22.50 !	5022	526	5548 !	3	3
28	9 22	750.4 + 6.8	+ 9.7	21.00 !	3815	536	4351 !	3	3
28	9 26	750.4 + 6.6	+ 9.6	21.70 !	4478	536	5014	3	3
28	9 30	750.4 + 6.8	+ 9.5	22.40 !	4781	536	5317 !	3	3
31	9 25	743.7 + 2.5	+ 6.1	20.90 !	3641	488	4129 !	3-4	3-4
31	9 28	743.7 + 2.5	+ 6.1	21.70 !	4243	488	4731	3-4	3-4
31	9 32	743.7 + 2.5	+ 6.1	22 50 !	4645	488	5133 !	3-4	3-4
Mai 15	15 3	749.7 + 9.0	+ 9.6	22 40 !	4737	508	5245 !	3	3
15	15 15	749.7 + 9.0	+ 9 6	21.80 !	4433	508	4941 !	3	3
15	15 17	749.7 + 9.0	+ 9.6	21.20 !	4122	508	4630 !	3	3

Datum	Sternzeit	Barom. und Lufttemp.	J	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ	Red. Distanz	Bildgüte R.	S.
Mai 20	15 13	752.4 + 5.7	+ 9.0	22.60!	4793	+ 476	5269!	4	3-4
20	15 20	752.4 + 5.7	+ 9.0	21 80!	4344	476	4820	4	3-4
20	15 27	752.4 + 5.7	+ 9.0	21.00!	3698	476	4174!	4	3-4
26	14 0	747.5 + 19.5	+ 21.7	22.00	4463	446	4909	3-4	3
26	14 5	747.5 + 19.5	+ 21.7	22.00	4476	446	4922	3-4	3
26	14 8	747.5 + 19.5	+ 21 7	22 00	4468	446	4914	3-4	3
30	14 56	752 0 + 13.3	+ 16.9	22.00	4520	447	4967	3	3
Juni 3	14 47	752.0 + 13.3	+ 17.1	21.98!	4293	431	4724	2-3	2-3
3	15 2	749.5 + 12.3	+ 17.1	22 60!	4789	431	5220	2-3	2-3
3	15 8	749.1 + 12.4	+ 17.1	21.00!	3609	431	4040!	2-3	2-3
7	15 28	747.1 + 12.5	+ 16.1	21.90!	4308	533	4841	3	3-4
7	15 42	747.0 + 12.0	+ 15.8	21.10!	3984	533	4517!	3	3-4
7	15 58	747.0 + 11.8	+ 15.8	22.70!	4864	533	5397!	3	3-4
14	15 25	746.8 + 17.5	+ 20.6	22.00	4495	542	5037	3	3
14	15 28	746.8 + 17.5	+ 20.5	22.00	4622	542	5164	3	3
Juli 16	18 4	751.4 + 23.9	+ 26.3	22.10	4308	736	5044	3	3

Unter Σ ist die Summe aller an die Distanzen anzubringenden Correctionen ohne die Correctionen für Temperatur und Eigenbewegung gegeben.

Aus ihnen ergibt sich der Temperaturcoefficient s zu

$$0.001185 \pm 0.000100$$

für 1° und 100 Skalenteile.

Die entsprechenden Werte sind für:

$$\text{Schur } s = 0.000790 \pm 0.000042$$
$$\text{Ambronn } s = 0.000909 \pm 0.000033$$

Die Unterschiede in diesen drei Werten sind zwar nur gering, sie überschreiten aber alle den mittleren Fehler und müssen daher doch wohl als reell angesehen werden. Es lässt sich nun untersuchen, in wie weit die Unterschiede in den Coefficienten c der Normalstellung (S. 6) den Unterschieden in den eben gefundenen Temperaturcoefficienten entsprechen. Die Beziehungen, welche zwischen diesen beiden Coefficienten bestehen, lassen sich erkennen, wenn wir uns deren Zusammensetzung in folgender Weise vergegenwärtigen.

Es seien der Ausdehnungscoefficient:

des Rohres $= \gamma$
der Skalen $= \alpha$
der Brennweite für Axialstrahlen und eine bestimmte Farbe $= \beta$

Die Aenderung der Objektweite des Systems Auge-Okular $= x$.

Es sei ferner die Verschiebung desjenigen Punktes, welcher als der schärfste aufgefasst wird, gegen eine bestimmte Ausgangslage der Brennebene $= y$ und f die Brennweite.

Dann ist die Aenderung der Normalstellung gegeben durch:

$$c = f\,(\beta - \gamma) + y + x.$$

Der Temperaturcoefficient s ist gegeben durch den Ausdruck:

$$s = f\,(\beta - \alpha) + y.$$

Demnach ist

$$s - c = f(\gamma - \alpha) - x.$$

Die Differenz der beiden Coefficienten hängt daher für ein und denselben Beobachter nur von der Instrumentalkonstanten $f(\gamma - \alpha)$ und dem persönlichen Coefficienten x des Auges ab. Ferner ist $y = s + (\alpha - \beta) f$.

Da die Grössen α, β, γ, c und s bekannt sind, lassen sich x und y aus ihnen finden, und es fragt sich, ob wir hierfür im vorliegenden Falle Werte erhalten, die einigen Anspruch auf Realität erheben können. Andernfalls wäre man genötigt anzunehmen, dass beim focusieren ganz andere Verhältnisse obwalten als beim distanzmessen.

Im vorliegenden Falle sind die Coefficienten

c für Sch. = 0.0192 ± 0.002,7
A. = 0.0252 ± 0.001,8
M. = 0.0236 ± 0.001,7.

Die Coefficienten s, auf dieselbe Einheit gebracht durch Multiplikation mit f sind für

Sch. 0.0205 ± 0.0011
A. 0.0237 ± 0.0009
M. 0.0310 ± 0.0026

Demnach ist $s - c = f(\gamma - \alpha) - x = -0.0013 \pm 0.002.9$ für Sch.
$+0.0015 \pm 0.002.0$ „ A.
$-0.0074 \pm 0.003.1$ „ M.

Da das Rohr und die Scala denselben Ausdehnungscoefficienten haben (cf. Schur: Mitteilungen VI S. 52.) so ist $\alpha = \gamma$ und die eben erhaltenen Zahlen geben sofort den persönlichen Factor x an.

Die Augen der drei Beobachter wären demnach verschieden stark von der Temperatur abhängig und zwar würden die Augen bei abnehmender Temperatur bei Schur und mir weitsichtiger. Für mich scheint der Coefficient wirklich vorhanden zu sein. Mir ist freilich direkt eine solche Abhängigkeit noch nie aufgefallen, obschon sich die Sehweite bei dem kleinsten zulässigen Werte von $x = 0.004$ und einem Temperaturunterschiede von 30° etwa um 1.3 Dioptrien ändern müsste.

Um einen Ueberblick zu haben, innerhalb welcher Grenzen die mit y bezeichneten Aenderungen etwa liegen können, habe ich mit den von Schur (S. 57) angeführten Konstanten des Objectivs [nach Schwarzschild, Mitteilungen No. IX S. 19] die Grösse der Zerstreuungskreise für die Wellenlängen C, D und F bei

0° und 20° berechnet. Dieselben sind

		bei 0°	20°
für	C	$+0''.69$	$+0''.78$
	D	$+0.04$	$+0''.03$
	F	$-1''.41$	$-1''.48.$

Der Strahlengang für die einzelnen Wellenlängen ändert sein Querschnittsbild demnach so gut wie garnicht. Die gegenseitige Lage der Brennweiten ändert sich dagegen merkbarer. Die Verschiebung beträgt auf 1°

für $C + 0.030$ mm
$D + 0.050$
$F - 0.075.$

Die Ausdehnung des Metallrohres beträgt 0.0325 mm. Demnach ist $\alpha - \beta$

für $C + 0.002.5$
$D - 0.017.5$
$F - 0.042.5$

und folglich y

	C	D	F
für Schur	$+0.024.3$	$+0.004.3$	$-0.020.7$
Ambronn	$+$ 29.1	$+$ 9.1	$-$ 15.9
Meyermann	$+$ 33.1	$+$ 13.1	$-$ 11.9

Es zeigt sich also, dass zur Erklärung der Unterschiede in den Temperaturcoefficienten der Messungen die Annahme genügt, dass jeder Beobachter auf eine andere zwischen D und F gelegene Wellenlänge einstellt und bei allen Temperaturen in der Brennebene dieser Wellenlänge bleibt. Für mich käme allerdings eine sehr weit nach F liegende Wellenlänge in Betracht. Nimmt man jedoch noch hierzu die Verschiedenheiten, die in der Auffassung des ganzen Strahlenbüschels und seiner Aenderungen bestehen können, so ist wohl ein genügender Spielraum gegeben, um die Differenzen zwischen den Coefficienten der drei Beobachtungen zu erklären, so dass man zu der Annahme anderer Einstellungen beim focusieren und messen nicht genötigt ist.

Interessant ist hier noch zu bemerken (mit Bezug auf Ambronn, Mitteilungen No. VII. S. 26), dass die zeitliche Aenderung des Coefficienten c bei Schur hauptsächlich in einer Aenderung der Auffassung des schärfsten Punktes durch ihn bedingt ist, da sich der Temperaturcoefficient entsprechend ändert, respective konstant bleibt bei fälschlich konstant angenommenem Coefficienten c.

Es sei hier ferner noch darauf hingewiesen, dass bei Verschwinden des Coefficienten x die Reduktion für den betreffenden Beobachter sich etwas vereinfachen lässt. Es kann dann die Reduktion auf die Normalstellung ganz unterbleiben und direkt von der abgelesenen Okularstellung mit dem aus dem Temperaturcoefficienten der Messungen sich ergebenden Faktor auf die Normalstellung bei 0° reduziert werden, was um so unbedenklicher geschehen kann, als die Ab-

weichungen $N-O$ meist unter 0.1 mm betragen. Für Ambronn z. B. würde durch dies Verfahren bei einer Distanz von 100 Skalenteilen nnd einer Abweichnng $N-O$ von ± 0.1 mm ein Fehler von nnr $\mp 0''.0076$ entstehen.

Dies meint wohl auch Schur mit seinem Vorschlage anf S. 50 unten in Mitteilungen Bd. VI.

IV. Systematische Korrektionen der Distanzmessungen.

Zur Bestimmung einer eventuell vorhandenen systematischen Korrektion der Messungen habe ich Distanzen des Löwenbogens und des Hydrakreises gemessen, Es zeigt sich, dass systematische Fehler in der Tat existieren, dass dieselben aber zur Genüge dargestellt werden, wenn man nach dem Vorschlage von F. Cohn (A. N. Bd. 142, S. 193) zu allen Distanzen eine Konstante addiert.

Misst man zwischen n auf einem grössten Kreise liegenden Sternen alle möglichen Distanzen $\left(\text{also } \frac{n(n-1)}{2}\right)$, und ist $a_{i,k}$ $\left(\begin{matrix} i,k = 1, 2, \ldots, n \\ i < k \end{matrix}\right)$ die zwischen den Sternen i und k gemessene Distanz, so ergibt sich die Konstante aus dem Ausdrucke:

$$c = \sum_{(i,k)} (n+2i-2k)\, a_{ik} \left(\begin{matrix} i,k = 1, 2, [\ldots]\, n \\ i < k \end{matrix}\right).$$

Die Sterne des Löwenbogens finden sich angeführt von Schur in den A. N. Bd. 142, S. 225. Benntzt habe ich die Sterne 1 bis 5, wobei allerdings die Distanz 4—5 fortfällt, da ich bei ihr versehentlich einen der beiden Sterne mit einem in unmittelbarer Nähe stehenden verwechselt habe. Ich merkte diesen Irrtum wegen des geringen Unterschiedes der gemessenen und der gesuchten Distanz erst bei der definitiven Bearbeitung der Beobachtnngen. Im Folgenden gebe ich die Beobachtungen selbst.

Löwenbogen.

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemper.	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R	Bildgüte S
1904					1—2				3	3
Mai 7	14h 6.6	738.5 + 6.8	+ 9.6	21.80	78.5676	+ 29	78.5705	78.5655	3	3
15	14 28.1	749.6 + 9.5	+ 10.3	21.80	78.5574	+ 26	5600		3	3
20	14 51.0	752.4 + 5.1	+ 9.8	21.80	78.5656	+ 4	5660		3	3
1904					1—3					
Mai 7	14 12.9	738.5 + 6.7	+ 9.5	21.80	98.8261	+ 43	98.8304	98.8391	3	3
15	14 34.1	749.6 + 9.5	+ 10.2	21.80	98.8328	+ 38	8366		3	3
20	14 43.5	752.4 + 5.6	+ 10.0	21.80	98.8430	+ 32	8462		3	3
30	14 6.0	752.3 + 14.9	+ 17.9	22.00	98.8500	— 69	8431		3	3-4

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemper.	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R	Bildgüte S
1904					1—4.					
Mai 7	$14^h19.6$	738.5 + 6.6	+ 9.4	21.80	129.5428	+ 71	129.5499	129.5488	3	3
16	13 51.1	750.5 + 11.8	+ 16.5	21.90	129.5443	— 39	5404		3	4
20	14 36.0	752.4 + 5.9	+ 10.5	21.80	129.5498	+ 64	5562		3	3
1904					1—5.					
Mai 16	14 2.1	750.5 + 11.5	+ 16.0	21.90	145.9478	— 15	145.9463	145.9538	3	3
20	14 29.5	752.4 + 6.0	+ 10.7	21.80	145.9523	+ 59	9582		3	3
30	14 12.5	752.2 + 14.7	+ 17.5	22.00	145.9651	— 83	9568		3	3-4
1904					2—3.					
Mai 7	14 27.6	738.5 + 6.5	+ 9.3	21.80	20.3745	— 18	20.3727	20.3694	3	3
16	14 8.6	750.5 + 11.3	+ 15.7	21.90	20.3701	— 33	3668		3	3
20	14 23.0	752.4 + 6.2	+ 10.9	21.80	20.3709	— 22	3687		3	3
1904					2—4.					
Mai 7	14 33.6	738.5 + 6.3	+ 9.1	21.80	51.0378	— 3	51.0375	51.0320	3	3
16	14 16.6	750.6 + 11.1	+ 15.5	21.90	51.0354	— 36	0318		3	3
20	14 16.0	752.4 + 6.4	+ 11.1	21.80	51.0277	— 10	0267		3	3
1904					2—5.					
Mai 16	14 20.6	750.6 + 11.0	+ 15.3	21.90	67.4281	— 20	67.4261	67.4225	3	3
20	14 10.5	752.4 + 6.5	+ 11.4	21.80	67.4192	+ 9	4201		3	3
Juni 4	14 46.0	752.0 + 14.4	+ 17.9	21.80	67.4215	— 1	4214		3	3
1904					3—4.					
Mai 7	13 49.6	738.5 + 7.2	+ 9.9	21.80	30.7210	— 45	30.7165	30.7174	3	3
16	14 26.6	750.7 + 10.8	+ 15.1	21.90	30.7213	— 62	7151		3	3
20	14 3.8	752.4 + 6.6	+ 11.6	21.80	30.7253	— 48	7205		3	3
1904					3—5.					
Mai 7	13 42.1	738.5 + 7.4	+ 10.0	21.80	47.1202	— 54	47.1148	47.1099	3	3
16	14 31.6	750.7 + 10.6	+ 14.9	21.90	47.1242	— 68	1174		3	3
20	13 57.0	752.4 + 6.7	+ 11.9	21.80	47.1080	— 47	1033		3	3
30	14 19.0	752.1 + 14.5	+ 17.1	22.00	47.1133	— 92	1041		3	3-4
1904					4—5.					
Mai 16	14 38.1	750.7 + 10.5	+ 14.6	21.90	17.5681	— 7	17.5674	17.5691	3	3
20	13 55.5	752.4 + 6.8	+ 12.0	21.98	17.5694	— 12	5682		3	3
30	14 29.5	752.0 + 15.0	+ 16.9	22.00	17.5731	— 15	5716		3	3-4

Diese Distanzen wurden mit den von Schur gegebenen Korrektionen auf einem grössten Kreis reduziert. Die so erhaltenen Distanzen sind dann die folgenden:

1—2	78.5222
1—3	98.8346
1—4	129.5386
1—5	145.9448
2—3	20.2999
2—4	51.0230
2—5	67.4160
3—4	30.7094
3—5	47.1046

Wegen des Fehlens der Distanz 4—5 habe ich die Gruppen 1 bis 4 und 1 bis 5

ohne 4 getrennt ausgewertet und aus den Resultaten das Mittel genommen. Ich erhalte

$$C = +0.0063 \pm 20.$$

Hydrakreis.

Datum	Stern-zeit	Barometer und Lufttemper.	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R	Bildgüte S
1905					c—f.					
Jan. 7	8h30	753.2 — 0.8	+ 0.5	21.51	177.2693	+ 1622	177.4315	177.4433	3	2-3
8	8 21	753.0 + 0.1	+ 1.4	21.52	2868	1871	4589		3	3
14	6 8	762 1 — 8.4	— 5.7	21.37	2580	1974	4554		3	3
14	8 20	782.1 — 8.4	— 5.7	21.37	2758	1871	4629		3	3
15	6 17	755.2 — 9.0	— 5.7	21.35	2452	1893	4345		3-4	3
15	7 44	754.7 — 9.8	— 7.5	21.35	3059	1452	4511		2-3	3
15	8 16	754.4 — 10.2	— 7.6	21.30	3019	1415	4434		2-3	3
20	5 47	753.5 — 1.8	— 1.3	21.48	2374	1990	4364		3	3
20	7 0	753.4 — 2.5	— 1.7	21.48	2884	1455	4339		3-4	3-4
21	6 50	753 4 — 2.5	— 1.8	21.48	2756	1499	4255		3	3
22	8 43	757.0 — 5.8	— 3.7	21.40	3161	1322	4483		3	2-3
23	7 9	756.8 4.4	— 2.2	21.45	2987	1442	4429		3	3
23	9 52	756.3 — 5.4	— 3.4	21.45	3248	1184	4432		3	3
1905					d—f.					
Jan. 7	6 46	753.7 — 0.8	+ 0.5	21.51	122.4630	1038	122.5668	122.5703	3	2-3
8	6 48	752.7 — 0.0	+ 1.5	21.52	4888	1017	5905		3	3
14	5 27	762.2 — 8.2	— 5.3	21.37	4044	1713	5757		3	3
14	6 28	762.0 — 8.4	— 5 8	21.37	4592	1236	5828		3	3
15	8 25	755.1 — 9.1	— 5.8	21.35	4376	1253	5829		3	3
15	7 54	754 5 — 10.0	— 7.6	21.35	4748	978	5726		2-3	3
15	8 8	754.4 — 10.1	— 7.8	21.30	4711	980	5691		2-3	3
20	5 59	753.4 — 2.0	— 1.4	21.48	4344	1289	5633		3	3
20	7 9	753.3 — 2.5	— 1.8	21.48	4688	964	5652		3-4	3-4
21	6 57	753.4 — 2.5	— 1.8	21.48	4593	1001	5594		3	3
22	9 32	757.1 — 8.8	— 4.1	21.40	4936	832	5768		3	2-3
23	7 19	756.6 — 4.4	— 2.3	21.45	4661	959	5620		3	3
23	9 59	756.2 — 5.4	— 3.5	21.45	4868	808	5675		3	3
1905					c—d.					
Jan. 7	7 2	754.2 — 1.3	+ 0.4	21 51	54.8966	426	54.9392	54.9342	3	2-3
8	8 35	752.8 0.0	+ 1.5	21.52	8868	465	9333		3	3
14	5 36	762.2 — 8.2	— 5.3	21.37	8663	710	9373		3	3
14	6 37	762.0 — 8.4	— 5.9	21.37	8853	520	9378		3	3
15	6 35	755.1 — 9.2	— 6.3	21 35	8828	525	9353		2-3	3
15	7 36	754.7 — 9.8	— 7.4	21 35	8908	451	9359		2-3	3
15	8 24	754.3 — 10.2	— 7.6	21.30	8891	367	9258		2-3	3
20	8 9	753.4 — 2.1	— 1.5	21.48	8755	535	9290		3	3
20	8 52	753.4 — 2.5	— 1.7	21.48	8861	441	9302		3	3
22	9 1	757.0 — 6.0	— 3.9	21.40	8986	362	9348		3	2-3
23	7 54	756.5 — 4.5	— 2.6	21.45	8911	468	9379		3	3
23	9 34	756.3 — 5.3	— 3.2	21.45	8985	352	9337		3	3
1905					c—b.					
Jan. 14	5 52	762.1 — 8.3	— 5.5	21.37	52.8683	678	52.9356	52.9320	3	3
14	6 54	782.0 — 8.4	— 6.0	21.37	8850	500	9350		3	3
15	6 50	755.0 — 9.3	— 6.7	21.35	8810	509	9319		2-3	3
15	7 6	755.0 — 9.4	— 6.8	21.35	8813	489	9302		2-3	3

Datum	Stern-zeit	Barometer und Lufttemper.	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R	Bildgüte S
Jan. 15	8^h38	754.2 — 10.4	— 7.6	21.30	52.8882	+ 405	52.9287		2-3	2-3
20	6 26	753.4 — 2.3	— 1.6	21.48	8829	518	9347		3	3
20	6 36	753.4 — 2.4	— 1.7	21.48	8814	493	9307		3	3
22	9 8	757.1 — 6.0	— 4.0	21.40	8961	356	9317		3	2-3
23	8 8	756.5 — 4.5	— 2.7	21.45	8925	377	9302		3	3
23	9 20	756.4 — 5.8	— 3.0	21.45	8963	353	9316		3	3
1905					b — d.					
Jan. 14	5 44	762.1 — 8.3	— 5.4	21.37	107.6437	1374	107.7811	107.7714	3	3
14	6 45	762.0 — 8.4	— 5.9	21.37	6858	1010	7868		3	3
15	6 43	755.0 — 9.2	— 6.5	21.35	6684	1022	7706		2-3	3
15	7 29	754.8 — 9.7	— 7.3	21.35	6804	882	7686		2-3	3
15	8 31	754.3 — 10.3	— 7.6	21.30	6795	811	7606		2-3	2-3
20	6 18	753.4 — 2.3	— 1.6	21.48	6646	1038	7684		3	3
20	6 43	753.4 — 2.5	— 1.7	21.48	6775	926	7701		3	3
22	9 18	757.1 — 6.1	— 4.0	21.40	6997	708	7705		3	2-3
23	8 1	756.5 — 4.5	— 2.6	21.45	6870	742	7612		3	3
23	9 27	756.8 — 5.3	— 3.1	21.45	7076	682	7758		3	3
1905					e — f.					
Jan. 20	7 17	753.3 — 2.5	— 1.8	21.48	47.6073	272	47.6355	47.6400	3-4	3-4
21	7 5	753.4 — 2.5	— 1.8	21.48	6078	290	6368		3	3
21	7 47	753.4 — 2.5	— 1.9	21.48	6127	266	6393		3	3
21	7 54	753.5 — 2.5	— 1.9	21.48	6141	263	6404		3	3
21	8 32	753.5 — 2.5	— 2.0	21.48	6183	256	6439		3	3
22	9 39	757.1 — 6.4	— 4.2	21.40	6172	291	6463		3	2-3
23	7 30	756.5 — 4.4	— 2.4	21.45	6105	290	6395		3	3
23	10 3	756.3 — 5.5	— 3.5	21.45	6077	302	6379		3	3
1905					e — d.					
Jan. 20	7 28	753.3 — 2.5	— 1.8	21.48	77.4279	544	77.4823	77.4862	3-4	3-4
21	7 14	653.4 — 2.5	— 1.8	21.48	4322	584	4906		3	6
21	7 38	753.4 — 2.5	— 1.9	21.48	4300	526	4826		3	3
21	8 0	753.5 — 2.5	— 1.9	21.48	4375	495	4870		3	3
21	8 25	753.5 — 2.5	— 2.0	21.48	4432	469	4901		3	3
22	9 25	757.1 — 6.2	— 4.1	21.40	4474	436	4910		3	2-3
23	7 38	756.5 — 4.5	— 2.5	21.45	4352	524	4876		3	3
23	10 15	756.2 — 5.5	— 3.6	21.45	4366	417	4783		3	3
1905					e — c.					
Jan. 20	7 38	753.3 — 2.6	— 1.8	21.48	131.5783	928	131.6711	131.6771	3-4	3-4
21	7 21	753.4 — 2.5	— 1.9	21.48	5780	978	6758		3	3
21	7 30	753.4 — 2.5	— 1.9	21.48	5760	952	6712		3	3
21	8 7	753.5 — 2.5	— 1.9	21.48	5982	867	6849		3	3
21	8 19	753.5 — 2.5	— 2.0	21.48	5977	848	6825		3	3
22	8 53	757.0 — 6.0	— 3.8	21.40	5885	886	6771		3	2-3
23	7 45	756.5 — 4.5	— 2.5	21.45	5865	931	6796		3	3
23	9 43	756.3 — 5.4	— 3.3	21.45	5935	808	6743		3	3

Die Positionen der Sterne dieses Kreises finden sich angegeben von Auwers, Venus-Exped. Bd. V. S. 362. Die Korrektionen zur Reduktion der Distanzen auf den durch die Sterne *e* und *f* gehenden grössten Kreis und die hiermit reduzierten Distanzen sind die folgenden:

$c-f$	0.0000	177.4433
$c-e$	0.4938	131.1833
$c-d$	0.0437	54.8906
$d-f$	0.0196	122.5507
$d-e$	1.1987	76.2875
$e-f$	1.3825	46.2575
$b-d$	0.0000	107.7714
$b-c$	0.0550	52.8770

Aus diesen Werten ergibt sich als konstante systematische Korrektion

$$c = +0.0038 \pm 16.$$

Aus beiden Beobachtungsreihen geht hervor, dass auch bei mir dieser merkwürdige systematische Fehler deutlich ausgeprägt ist und zwar mit dem gleichen Vorzeichen und fast in gleicher Stärke wie bei Schur. Als Mittel aus meinen Bestimmungen finde ich

$$c = +0.0051 \pm 18.$$

Diese Korrektion ist an alle Distanzen vor ihrer weiteren Bearbeitung anzubringen.

V. Ableitung des definitiven Skalenwertes.

Zur Bestimmung des Skalenwertes dienten die Messungen des Polbogens und des Hydrakreises.

Bei der zwecks Ableitung des Temperaturcoefficienten der Distanzen (s. S. 10) vorgenommenen Ausgleichung der Messungen des Polbogens erhielt ich dessen Länge für 1903.35 zu: 169.4600 ± 0.0022 m. F.

Meine Beobachtungen erstrecken sich über einen zu kurzen Zeitraum, um aus ihnen auch etwas über die Grösse der zeitlichen Aenderung des Bogens folgern zu können. Die sich über viele Jahre erstreckenden Beobachtungen Schurs und Ambronns ergeben für diese Eigenbewegung einen Wert, der wesentlich grösser ist als der von Auwers (Venus Exped. V. S. 348) und Peter (V. J. S. 1896. S. 54) angegebene. Ich habe mich deshalb zur Reduktion der wahren Distanz auf die Zeit meiner Beobachtung des von Ambronn (Mitteilungen VII. S. 52) gegebenen Ausdruckes bedient:

$$\Delta = 6779.71 + 0.''050\,(T - 1875) = 6781.''13.$$

Meine Beobachtungen geben:

$$\Delta = 169.'4600 + \text{system. Korrektion} = 169'.4651.$$

Demnach ist

$$1^{s} = 40.''01499 \pm 0.''00017.$$

Zur Ableitung des Skalenwertes aus den Beobachtungen des Hydrakreises bediente ich mich zunächst der von Auwers (Venus Exped. V. S. 362) gegebenen Distanzen und Eigenbewegungen, wie sie bisher auch von anderen Beobachtern benutzt worden sind. Schon die erste oberflächliche Reduktion mit einem vorläufigen Skalenwerte, welche ich vornahm, um einen Ueberblick über eventuell vorhandene systematische Korrektionen zu erhalten, zeigte eine auffallende Uebereinstimmung zwischen den bei Schur und mir auftretenden Abweichungen von den nach Auwers berechneten Werten, und auch bei den von Ambronn gefundenen Abweichungen zeigt sich eine entsprechende, allerdings weniger ausgeprägte, Uebereinstimmung. Folgende Zusammenstellung lässt dies deutlich erkennen:

Dist.	Ambronn. 1890	Schur. 1890	Meyermann. 1905
c—f	+0".19	−0.37	−1.38
c—e	−0.39	0.00	−0.64
d—f	−0.35	+0.20	+0.03
b—d	−0.35	−0.10	−0.95
e—d	−0.11	+0.29	+0.94
c—d	−0.50	−0.28	−1.35
c—b	+0.11	+0.25	+0.54
e—f	−0.29	−0.13	−0.58

Der mittlere Fehler einer einzelnen Distanzmessung beträgt bei mir im Durchschnitt ± 0".24, der einer Distanz nur 0."07. Von dem Fehler des angenommenen vorläufigen Skalenwertes konnten die grossen Abweichungen bei mir nicht stammen, schon wegen des Zeichenwechsels und des Fehlens jeden Ganges.

Die Werte Ambronns beruhen auf einer geringeren Anzahl Beobachtungen als die Schurs, und haben nach Professor Ambronns eigener Meinung gegenüber denen von Schur weniger Gewicht. Sie haben daher bei den folgenden Rechnungen das Gewicht ⅓ erhalten. Aus der auffallenden Uebereinstimmung zwischen den Abweichungen bei Schur und mir nach Vorzeichen und Grösse geht überzeugend hervor, dass die Auwerschen Eigenbewegungen nicht richtig sein können, und zwar so stark, dass sich die Abweichungen schon bei Schur bemerklich machten. Es handelte sich nun für mich darum, die Eigenbewegungen selbständig unter Benutzung der Heliometerbeobachtungen zu bestimmen. Ich habe dies in folgender Weise getan. In dem Polbogen habe ich unter der Voraussetzung, dass mir die wahre Eigenbewegung desselben bekannt ist, ein Mittel, um die Messungen verschiedener Beobachter aus verschiedenen Zeiten mit einander in Verbindung zu setzen. Nachdem ich für mich die systematische Korrektion und aus dem Polbogen den Skalenwert abgeleitet hatte, führte ich eine völlig analoge Rechnung für die Beobachtungen Schurs aus.

Die systematische Korrektion für Schur findet F. Cohn (A. N. Bd. 142

S. 218) zu + 0.ʳ0039. Mit der oben angegebenen E. B. ist der Polbogen für 1891.37

$$\Delta = 6780.''53 = 169.^{r}4420 \text{ (Schur).}$$

Es ist demnach ein Skalenteil für Schur

$$1^{r} = 40.''01683.$$

Der entsprechende Wert für mich war

$$1^{r} = 40.01499.$$

Mit diesen Zahlen werden die Hydrabeobachtungen reduziert. Die folgende Zusammenstellung gibt die so erhaltenen Distanzen, die Zeit zwischen den Beobachtungen und die sich hieraus ergebenden Eigenbewegungen.

Distanz	Schur	Meyermann	M.—Sch.	Zwischenzeit	Eigenbewegung
c—f	7100.346	7100.582	+ 0.″236	14.ʸ56	+ 0.″0162
c—e	5269.527	5269.251	− 0. 276	14.71	− 0. 0187
d—f	4904.586	4904.843	+ 0. 257	14.70	+ 0. 0175
b—d	4312.537	4312.667	+ 0. 130	14.69	+ 0. 0089
e—d	3101.051	3100.805	− 0. 244	14.87	− 0. 0164
c—d	2198.008	2198.391	+ 0. 383	14.85	+ 0. 0258
c—b	2118.438	2118.273	− 0. 165	14.86	− 0. 0111
e—f	1906.965	1906.514	+ 0. 549	14.87	+ 0. 0369

Auch die Beobachtungen Ambronns wurden in gleicher Weise zur Berechnung der Eigenbewegungen verwendet. Aus ihnen ergeben sich die folgenden Werte

Distanz	Meyermann—Ambronn	Zwischenzeit	Eigenbewegung
c—f	+ 1″.05	13.ʸ7	+ 0.″0765
c—e	− 0.44	14.9	− 0.0295
d—f	− 0.04	14.9	− 0.0027
b—d	+ 0.10	14.9	+ 0.0067
e—d	− 0.42	15.0	− 0.0280
c—d	+ 0.35	14.8	+ 0.0236
c—b	− 0.11	15.0	− 0.0073
e—f	+ 0.58	15.0	+ 0.0387

Die folgende Zusammenstellung dieser Eigenbewegungen mit den von Auwers gegebenen zeigt den auffallenden Unterschied derselben. Unter der Rubrik „Mittel“ finden sich die Mittel aus den E. B. M.-Sch. und M.-A., wobei die letzteren das Gewicht ¹/₃ erhalten haben.

	Auwers	M.—Sch.	M.—A.	Mittel	Mittel-Auwers
c—f	−0″.0391	+0″.0162	+0″.0765	+0″.0313	+0″.0704
c—e	−0.0527	−0.0187	−0.0295	−0.0214	+0.0313
d—f	+0.0148	+0.0175	−0.0027	+0.0125	−0.0023
b—d	−0.0422	+0.0089	+0.0067	+0.0084	+0.0506
e—d	+0.0289	−0.0164	−0.0280	−0.0193	−0.0482
c—d	−0.0440	+0.0258	+0.0236	+0.0253	+0.0693
c—b	+0.0100	−0.0111	−0.0073	−0.0101	−0.0201
e—f	+0.0081	+0.0369	+0.0387	+0.0375	+0.0294

Aus diesen Differenzen ist zu ersehen, dass ich bei der Rechnung mit den Auwers'schen Werten durch die Reduktion der Distanzen von 1885 bis 1905 zu Werten gelangen würde, die von den meinigen um Beträge bis über 1″ abwichen und damit ausserhalb der zulässigen Fehlergrenzen liegen. Obgleich in den von mir abgeleiteten Eigenbewegungen die zufälligen und eventuell noch vorhandenen systematischen Fehler der 3 Beobachter stecken, glaube ich sie doch, wegen der homogenen Art des Ursprungs den aus den Meridianbeobachtungen abgeleiteten Werten vorziehen zu sollen. Ich habe demnach die von mir aus den Heliometer-Beobachtungen abgeleiteten Eigenbewegungen zur Reduktion der Meridiankreis-Distanzen von 1885.0 auf 1905.05 verwendet.

In folgender Zusammenstellung finden sich die Distanzen auf 1905.05 reduziert mit den Eigenbewegungen M.—Sch. und M.—A., ferner die Differenzen dieser Distanzen gegen meine beobachteten und mit dem oben angegebenen vorläufigen Skalenwerte reduzierten Distanzen. In den beiden letzten Spalten sind die Differenzen gegeben, welche übrig bleiben zwischen meinen mit dem definitiven Skalenwerte reduzierten Distanzen und den von Auwers gegebenen und mit den Eigenbewegungen M.—Sch. und M.—A. auf 1905.05 reduzierten Distanzen.

	Auwers mit E. B. M.—Sch.	Auwers-Heliometer	Auwers mit E. B. M.—A.	Auwers-Heliometer	Auwers-Heliometer M.—Sch.	Auwers-Heliometer M.—A.
c—f	7100.″32	−0.″26	7101.53	+0.″95	−0.″19	+1.″02
c—e	5269.25	0.00	5269.03	−0.22	+0.06	−0.16
d—f	4904.87	+0.03	4904.46	−0.38	+0.08	−0.33
b—d	4312.66	0.00	4312.66	−0.01	+0.05	+0.02
e—d	3100.69	−0.12	3100.46	−0.35	−0.09	−0.32
c—d	2198.30	−0.09	2198.26	−0.13	−0.07	−0.12
c—b	2118.25	−0.02	2118.33	+0.06	−0.01	+0.07
e—f	1906.36	−0.15	1906.40	−0.11	−0.14	−0.10
		Σ −0.″61		Σ −0.″19		

Die Summe der Distanzen in Skalenteilen ist 772.′45. Mithin ist die Korrektion des von mir angewendeten Skalenwertes nach dem System M.—Sch.

$-0.''00079$, nach dem System M.—A. $-0.''00025$. Dem letzteren Werte gebe ich wieder das Gewicht $^1/_3$ und erhalte so die Korrektion an den Ausgangswert zu

$$-0.''00065.$$

Es ist demnach

$$1^r = 40.''01434 \text{ aus dem Hydrakreise.}$$
$$= 40.01499 \text{ „ „ Polbogen.}$$

Der Unterschied der Parswerte ergibt auf 100 Skalenteile, der durchschnittlichen Entfernung in der nachfolgenden Orionvermessung, eine Differenz von nur 0.''06.

Ich gebe der Bestimmung aus dem Hydrakreise das doppelte Gewicht gegenüber der aus dem Polbogen, da der erstere Wert sich aus 8 am Meridiankreise beobachteten Distanzen ableitet. Weiter möchte ich das Gewicht nicht vergrössern, da die Distanz des Polbogens auf einer ungleich grösseren Anzahl von Messungen beruht als die einzelnen Hydradistanzen.

Ich erhalte so als definitiven Skalenwert

$$1^r = 40.''01456.$$

VI. Die Distanzen im Orion.

Hauptnetz.

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur		Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
1902			J.		a—b.					
Nov. 4	2h35	749.9 + 0.5	+ 3.0	21.60	144.5337	+ 744	144.6081	144.6098	3	3
6	6 14	743.7 + 4.0	+ 4.2	21.60	144.5045	+ 1000	144.6045		3	3-4
17	3 48	748.9 — 4.8	— 3.4	21.60	144.5272	+ 787	144.6059		2	3-4
20	2 33	752.4 — 8.3	— 5.1	21.80	144.5367	+ 708	144.6075		3	3
26	4 29	738.2 — 2.6	— 1.8	21.50	144.5395	+ 834	144.6229		3	3
1902					b—c.					
Nov. 11	3 26	747.2 + 4.4	+ 5.9	21.60	103.2255	+ 1280	103.3535	103.3475	3	3
17	4 11	748.9 — 4.8	— 3.4	21.60	103.2360	+ 1107	103.3467		2	3-4
19	3 58	749.7 — 5.6	— 4.9	21.50	103.2200	+ 1174	103.3374		2	2
21	5 3	753.4 — 9.0	— 7.5	21.50	103.2378	+ 1048	103.3426		2-3	2-3
26	4 41	738.2 — 2.6	— 1.8	21.50	103.2568	+ 1027	103.3595		3	3
1902					a—c.					
Nov. 4	3 48	749.9 + 0.5	+ 2.0	21.60	103.8157	+ 333	103.8490	103.8587	3	3
6	3 17	743.7 + 4.0	+ 5.2	21.60	103.8004	+ 409	103.8413		3	3-4
18	5 26	754.9 — 7.9	— 7.2	21.60	103.8400	+ 334	103.8734		3	3
21	4 4	753.4 — 9.0	— 7.0	21.50	103.8191	+ 367	103.8558		2-3	2-3
26	4 53	738.2 — 2.6	— 1.8	21.50	103.8440	+ 301	103.8741		3	3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur		Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
			J.		c—d.					
1902 Nov. 4	8^h 0	749.9 + 0.5	+ 2.3	21.60	103.7106	+ 788	103.7894	103.7967	3	3
6	4 15	743 7 + 4.0	+ 5.2	21.60	103.7128	+ 733	103.7861		3	3-4
11	3 45	747 2 + 4.4	+ 5.7	21.60	103.7283	+ 717	103.8000		3	3
18	6 23	754.9 — 7.9	— 7.2	21.60	103.6905	+ 1097	103.8002		3	3
19	4 35	749.7 — 5.6	— 4.8	21.50	103.7238	+ 807	103.8045		2	2
20	2 43	752.4 — 8.8	— 5.3	21.80	103.7238	+ 764	103.8002		3	3
					a—d.					
1902 Nov. 4	4 0	749.9 + 0.5	+ 1.8	21.60	98.7710	+ 1163	98.8873	98.8871	3	3
11	3 56	747.2 + 4.4	+ 5.6	21.60	98.7833	+ 1139	98.8972		2-3	2-3
21	3 40	753.4 — 9.0	— 8.8	21.50	98.7508	+ 1321	98.8829		2-3	2-3
22	3 49	750.5 — 8.1	— 5.8	21.50	98.7640	+ 1245	98.8885		3	3
Dez. 13	5 7	755.0 — 5.8	— 5.9	21.40	98.7915	+ 892	98.8807		3	3
					d—e.					
1902 Nov. 4	5 10	749.9 + 0.5	+ 1.8	21.60	78.1421	+ 220	78.1641	78.1622	3	3
6	2 45	748.7 + 4.0	+ 5.8	21.60	78.1083	+ 411	78.1494		3	3-4
18	3 50	754.9 — 7.9	— 8.5	21.60	78.1249	+ 266	78.1515		3	3
21	4 33	753.4 — 9.0	— 7.0	21.50	78.1478	+ 267	78.1745		2-3	2-3
20	3 51	752.4 — 8.3	— 5.8	21.50	78.1435	+ 282	78.1717		3	3
					a—e.					
1902 Oct. 31	2 43	748.8 + 4.0	+ 5.8	21.60	85.9876	+ 989	86.0865	86.0803	3	3
Nov. 4	4 15	749.9 + 0.5	+ 1.8	21.60	86.0187	+ 777	86.0914		3	3
6	3 59	743.7 + 4.0	+ 5.2	21.60	85.9860	+ 789	86.0649		3	3-4
19	4 24	749.7 — 5.6	— 4.8	21.50	86.0034	+ 813	86.0847		2	2
22	4 0	750.5 — 8.1	— 5 8	21.50	85.9900	+ 839	86.0739		3	3
					e—f.					
1902 Nov. 4	4 51	749.9 + 0.5	+ 1.8	21.60	64.8329	+ 211	64.8540	64.8571	3	3
6	2 29	743.7 + 4.0	+ 5 5	21.60	64.7684	+ 703	64.8387		3	3-4
18	4 5	754.9 — 7.9	— 6.8	21.60	64.8181	+ 316	64.8497		3	3
20	3 32	752.4 — 8.8	— 5.5	21.80	64.8279	+ 279	64.8558		3	3
21	4 46	753.4 — 9.0	— 7.3	21.50	64.8500	+ 244	64.8744		2-3	2-3
26	5 5	738.2 — 2.8	— 1.8	21.50	64.8481	+ 216	64.8697		3	3
					a—f.					
1902 Nov. 4	4 40	749.9 + 0.5	+ 1.8	21.60	110.5518	+ 510	110.6028	110.6112	3	3
11	4 20	747.2 + 4.4	+ 5.8	21.60	110 5716	+ 443	110.6159		2-3	2-3
17	3 49	748.9 — 4.8	— 3.4	21.60	110.5625	+ 446	110.6071		2	3-4
18	5 37	754.9 — 7.9	— 7.2	21.60	110.5462	+ 650	110.6112		3	3
20	3 15	752.4 — 8.3	— 5.5	21.80	110.5863	+ 329	110.6192		3	3
					f—g.					
1902 Nov. 4	5 39	749.9 + 0.5	+ 1.6	21.60	96.2898	+ 833	96.3731	96.3633	3	3
6	5 33	743.7 + 7.0	+ 5.0	21 60	96.2830	+ 810	96 3640		3	3
17	4 22	748 9 — 4.8	— 3.5	21.60	96.2650	+ 894	96.3544		2	3-4
19	4 15	749.7 — 5.8	— 4.9	21.50	96.2746	+ 921	96 3687		2	2
22	4 16	750.5 — 8.1	— 6.3	21.50	96.2616	+ 947	96.3563		3	3
					a—g.					
1902 Nov. 4	5 25	749.9 + 0.5	+ 1.8	21.60	75.2246	+ 279	75.2525	75.2512	3	3
6	2 57	743.7 + 4.0	+ 5.8	21.60	75.1949	+ 722	75.2671		3	3-4
18	4 19	754.9 — 7.9	— 7.1	21.60	75.1925	+ 439	75.2364		3	3-4
20	4 0	752.4 — 8.3	— 5.9	21.80	75.2053	+ 408	75.2461		3	3
21	3 52	753.4 — 9.0	— 6.9	21.50	75.2022	+ 516	75.2538		2-3	2-3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur		Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte	
			J.						R.	S.
					g—b.					
1902 Nov. 4	5^{h}55	749.9 + 0.5	+ 1.5	21.60	102.9011	+ 797	102.9808	102.9516	3	3
6	5 52	743.7 + 4.0	+ 4.8	21.60	102.8777	+ 732	102.9509		3	3
17	4 33	748.9 — 4.8	— 3.5	21.60	102.8845	+ 696	102.9541		2	3-4
18	6 3	754.9 — 7.9	— 7.2	21.60	102.8677	+ 732	102.9409		3	3
20	3 4	752.4 — 8.3	— 5.4	21.80	102.8815	+ 634	102.9449		3	3
					a—b.					
1902 Nov. 4	6 11	749.9 + 0.5	+ 1.4	21.60	116.5580	+ 1053	116.6633	116.6713	3	3
6	3 43	743.7 + 4.0	+ 5.2	21.60	116.5341	+ 1326	116.6667		2-3	2-3
11	4 36	747.2 + 4.4	+ 5.2	21.60	116.5636	+ 1206	116.6842		2-3	2-3
19	4 6	749.7 — 5.6	— 4.9	21.50	116.5438	+ 1333	116.6771		2	2
21	5 16	753.4 — 9.0	— 7.5	21.50	116.5485	+ 1169	116.6654		2-3	2-3
					h—b.					
1902 Nov. 4	6 21	749.9 + 0.5	+ 1.4	21.60	110.0304	+ 272	110.0576	110.0580	3	3
6	3 25	743.7 + 4.0	+ 5.5	21.60	110.0054	+ 364	110.0418		3	3-4
18	4 33	754.9 — 7.9	— 7.1	21.60	110.0263	+ 331	110.0594		3	3
21	4 21	753.4 — 9.0	— 7.0	21.50	110.0164	+ 385	110.0549		2-3	2-3
22	4 32	750.5 — 8.1	— 6.4	21.50	110.0384	+ 359	110.0743		3	3
					a—b.					
1904 Nov. 16	5 15	756.9 — 2.2	+ 0.4	21.50	144.5125	+ 1010	144.6135	144.6140	2	2
Dez. 10	5 20	734.5 — 0.2	+ 2.0	21.55	144.5412	+ 883	144.6295		3	3
„ 27	6 1	755.7 — 6.4	— 4.2	21.40	144.4997	+ 1125	144.6112		2-3	2-3
1905 Jan. 22	6 1	756.7 — 4.4	— 2.0	21.47	144.5015	+ 1004	144.6019		2-3	2-3
					b—c.					
1904 Nov. 16	5 24	756.9 — 2.2	+ 0.3	21.50	103.2589	+ 1016	103.3605	103.3650	2	2
Dez. 10	5 30	734.4 — 0.2	+ 2.0	21.55	103.2735	+ 880	103.3615		3	3
„ 27	5 19	755.8 — 6.3	— 3.8	21.40	103.2744	+ 976	103.3720		2-3	2-3
1905 Jan. 22	7 20	756.9 — 5.0	— 2.8	21.47	103.2618	+ 1041	103.3659		2-3	2-3
					a—c.					
1904 Nov. 16	4 53	756.7 — 2.3	+ 0.7	21.50	103.8286	+ 340	103.8626	103.8652	2	2
Dez. 16	5 51	734.4 — 0.1	+ 1.8	21.55	103.8443	+ 258	103.8701		3	3
„ 27	5 12	755.8 — 6.3	— 3.6	21.40	103.8316	+ 318	103.8634		2-3	2-3
1905 Jan. 2	6 28	761.1 — 16.8	— 13.8	21.16	103.8318	+ 465	103.8793		4	4
„ 22	6 14	756.7 — 4.4	— 2.2	21.47	103.8204	+ 304	103.8508		2-3	2-3
					c—d.					
1904 Nov. 16	5 34	757.0 — 2.1	+ 0.2	21.50	103.7143	+ 827	103.7970	103.7972	2	2
Dez. 10	5 40	734.4 — 0.2	+ 1.9	21.55	103.7291	+ 766	103.8057		3	3
1905 Jan. 7	5 7	752.1 + 0.2	+ 0.9	21.51	103.7296	+ 721	103.8017		3-4	3-4
„ 22	7 9	756.9 — 5.0	— 2.8	21.47	103.6988	+ 721	103.7709		2-3	2-3
					a—d.					
1904 Nov. 16	5 51	757.0 — 2.0	0.0	21.50	98.8115	+ 753	98.8868	98.8946	2	2
Dez. 10	6 6	734.3 — 0.2	+ 1.5	21.55	98.8155	+ 695	98.8850		3	3
1005 Jan. 7	4 56	752.0 + 0.3	+ 1.0	21.51	98.8236	+ 823	98.9059		3-4	3-4
„ 14	4 49	762.2 — 8.0	— 4.9	21.37	98.8085	+ 923	98.9008		4	3-4
					d—e.					
1904 Nov. 16	6 1	757.1 — 2.1	0.0	21.50	78.1465	+ 226	78.1691	78.1702	2	2
Dez. 14	5 44	738.9 + 1.5	+ 2.9	21.55	78.1565	+ 186	78.1751		3	3
„ 27	4 57	755.8 — 6.3	— 3.3	21.40	78.1502	+ 190	78.1692		2-3	2-3
1905 Jan. 22	6 58	756.9 — 4.8	— 2.6	21.47	78.1530	+ 146	78.1676		2-3	2-3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					a—e.					
1904 Nov. 16	6h30	757.2 — 2.3	— 0.8	21.50	85.9976	+ 937	86.0915	86.0901	2	2
Dez. 14	5 35	738.9 + 1.5	+ 3.0	21.55	86.0020	+ 762	86.0782		3	3
Dez. 27	5 29	755.7 — 6.3	— 4.1	21.40	86.0149	+ 825	86.0974		2-3	2-3
1905 Jan. 22	5 42	756.6 — 4.2	— 1.8	21.47	86.0170	+ 766	86.0936		2-3	2-3
					e—f.					
1904 Nov. 16	6 16	757.1 — 2.3	— 0.2	21.50	64.8458	+ 193	64.8651	64.8638	2	2
Dez. 14	5 53	738.9 + 1.5	+ 2.9	21.55	64.8516	+ 157	64.8673		3	3
Dez. 27	4 47	755.9 — 6.3	— 2.6	21.40	64.6546	+ 208	64.8349		2-3	2-3
1905 Jan. 22	6 48	756.6 — 4.7	— 2.5	21.47	64.8545	+ 134	64.8679		2-3	2-3
					a—f.					
1904 Nov. 16	6 26	757.2 — 2.3	— 0.2	21.50	110.5477	+ 831	110.6308	110.6192	2	2
Dez. 14	6 0	738.9 + 1.5	+ 2.9	21.55	110.5544	+ 629	110.6173		3	3
Dez. 27	5 45	755.7 — 6.4	— 4.1	21.40	110.5483	+ 679	110.6162		2-3	2-3
1905 Jan. 22	5 51	756.7 — 4.3	— 1.9	21.47	110.5501	+ 624	110.6185		2-3	2-3
					f—g.					
1904 Nov. 16	6 50	757.2 — 2.4	— 0.4	21.50	96.2586	+ 1118	96.3704	96.3681	2	2
Dez. 14	6 8	738.9 + 1.5	+ 2.6	21.55	96.2820	+ 910	96.3730		3	3
Dez. 27	4 33	755.9 — 6.3	— 2.7	21.40	96.2754	+ 921	96.3675		3	3
1905 Jan. 22	6 38	756.8 — 4.5	— 2.4	21.47	96.2601	+ 1012	96.3613		3	3
					a—g.					
1904 Nov. 16	5 4	756.6 — 2.2	+ 0.6	21.50	75.2094	+ 351	75.2445	75.2476	2	2
Nov. 16	6 41	757.1 — 2.3	— 0.8	21.50	75.2360	+ 265	75.2625		2	2
Dez. 14	6 20	738.9 + 1.4	+ 2.3	21.55	75.2158	+ 239	75.2397		3	3
Dez. 27	4 23	756.0 — 6.2	— 2.5	21.40	75.1953	+ 423	75.2376		2-3	2-3
1905 Jan. 22	6 25	756.8 — 4.5	— 2.4	21.47	75.2302	+ 235	75.2537		3	3
					g—h.					
1904 Nov. 16	7 2	757.2 — 2.4	— 0.5	21.50	102.8407	+ 1141	102.9548	102.9577	2	2
Dez. 14	6 29	736.9 + 1.3	+ 2.7	21.55	102.8850	+ 828	102.9676		3	3
1905 Jan. 7	5 20	752.5 — 0.0	+ 0.7	21.51	102.8756	+ 705	102.9461		3-4	3-4
Jan. 22	7 42	757.0 — 5.3	— 3.0	21.47	102.8272	+ 1348	102.9620		2-3	2-3
					a—h.					
1904 Nov. 16	7 14	757.3 — 2.5	— 0.6	21.50	116.5392	+ 1209	116.6601	116.6653	2	2
Dez. 10	6 14	734.3 — 0.1	+ 1.3	21.55	116.5721	+ 1039	116.6760		3	3
Dez. 21	5 37	757.9 — 2.3	— 0.6	21.47	116.5500	+ 1107	116.6607		4	4
1905 Jan. 14	4 40	762.2 — 7.9	— 4.8	21.37	116.5452	+ 1194	116.6646		4	3-4
					h—b.					
1904 Nov. 16	7 22	757.3 — 2.5	— 0.7	21.50	110.0378	+ 406	110.0784	110.0747	2	2
Dez. 14	6 39	738.9 + 1.2	+ 2.5	21.55	110.0579	+ 221	110.0800		3	3
Dez. 21	5 23	758.0 — 2.3	— 0.6	21.47	110.0445	+ 273	110.0716		3	3
Dez. 27	6 7	755.7 — 6.4	— 4.2	21.40	110.0543	+ 284	110.0827		2-3	2-3
1905 Jan. 22	7 31	757.0 — 5.1	— 3.0	21.47	110.0256	+ 348	110.0606		2-3	2-3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					a_1—d.					
1902 Dez. 13	5h 18.2	757.4 — 6.0	— 5.8	21.35	104.6503	+ 900	104.7403	104.7302	3	3
1903 Jan. 14	7 18.3	763.0 — 11.4	— 8.4	21.31	104 6563	688	104.7251		2-3	2-3
Jan. 16	7 56.5	759.8 — 5.2	— 3.6	21.45	104 6645	607	104.7252		2	2
					a_1 – e.					
1903 Jan. 16	7 27.5	759.8 — 5.8	— 3.4	21.45	85.7445	1142	85.8587	85.8651	2	2
Jan. 17	6 20.5	760.7 — 7.8	— 6.4	21.35	85.7699	931	85.8630		3	3-4
März 1	7 40.5	743.1 + 3.1	+ 5.0	21.60	85.7564	1171	85.8735		3	3
					a_1—g.					
1903 Febr. 26	9 19.8	759.9 + 2.4	+ 4.6	21.60	67.3212	169	67.(3381)	67.3534	2-3	3-4
1904 Jan. 10	4 35.5	751.7 0.0	+ 1.2	21.50	67.3236	282	67.3518		3	3
Febr. 4	4 7.3	737.1 + 2.0	+ 3.1	21.51	67.3167	435	67.3602		3-4	3
					a_2—d.					
1903 Jan. 14	7 28.5	763.0 — 11.4	— 8.5	21.31	86.7393	617	86.8010	86 .8050	4	4
Jan. 16	8 6.5	759.8 — 5.1	— 3.7	21.45	86.7357	554	86.7911		2	2
1904 Dez. 14	6 51.2	738.9 + 1.1	+ 2.4	21.55	86.7727	502	86.8229		3	3
					a_2—e.					
1903 Jan. 16	7 40.0	759.8 — 5.3	— 3.5	21.45	77.4646	1155	77.5801	77.5800	2	2
Jan. 17	6 33.0	760.6 — 7.4	— 6.5	21.35	77.4886	851	77.5737		3	3-4
März 1	7 59.7	743.1 + 3.1	+ 4.8	21.60	77.4711	1150	77.5861		3	3
					a_2—g.					
1903 Febr. 26	9 27.3	759.9 + 2.4	+ 4.5	21.60	84.5970	114	84.(6084)	84.6330	2-3	3-4
1904 Jan. 10	4 42.5	751.7 0.0	+ 1.2	21.50	84.6004	378	84.6382		3	3
Febr. 4	4 15.3	739.1 + 1.8	+ 3.0	21.51	84.5883	414	84.6297		3	3
1905 Febr. 13	4 28.7	758.2 — 8.3	— 2.0	21.45	84.5965	429	84.6394		3	3-4
					n_9—e.					
1904 Jan. 10	4 1.5	751.7 + 0.2	+ 1.2	21.50	116.8213	1178	116.9391	116.9557	3-4	3
Dez. 14	7 2.0	738.9 + 1.0	+ 2.4	21.55	116.8532	1248	116.9780		3	3
1905 Jan. 23	6 35.7	756.6 — 4.4	— 2.0	21.45	116.8291	1209	116.9500		3	3
					n_9—h.					
1903 Dez. 3	5 7.8	749.3 — 4.5	— 3.7	21.40	81.1930	798	81.2728	81.2857	3-4	3-4
Dez. 23	6 48.3	746.1 0.0	+ 0.5	21.46	81.2175	747	81.2922		4	4
1904 Febr. 4	6 26.8	739.5 + 1.4	+ 2.2	21.51	81.2275	647	81.2922		3	3
					n_9—c.					
1904 Febr. 4	5 41.3	739.3 + 0.9	+ 2.2	21.51	122.8316	269	122.8585	122.8589	3	3
März 19	7 56.8	753.4 + 3.9	+ 6.0	21.55	122.8171	244	122.8415		3	3
März 20	8 7.9	750.6 + 6.1	+ 8.7	21.70	122.8570	197	122.8767		3	3
					n_{10}—e.					
1904 Jan. 10	4 9.5	751.7 + 0.1	+ 1.2	21.50	122.1680	1258	122.2938	122.3046	3-4	3
Dez. 14	7 13.2	738.9 + 0.9	+ 2.3	21.55	122.1881	1349	122.3230		3	3
1905 Jan. 23	6 26.7	756.7 — 4.4	— 1.9	21.45	122.1720	1251	122.2971		3	3
					n_{10}—h.					
1903 Dez. 3	5 16.3	749.3 — 4.5	— 3.7	21.40	76.0995	731	76.1726	76.1743	3-4	3-4
1904 Febr. 4	6 35.8	739.6 + 1.5	+ 2 2	21.51	76.1102	540	76.1642		3	3
März 28	8 2.6	748.9 + 9.4	+ 11.0	21.70	76.0963	896	76.1861		3	3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					n_{10}—c.					
1904 Febr. 4	5h48.8	739.4 + 1.0	+ 2.2	21.51	133.2843	+ 267	133 3110	133.3191	3	3
März 20	7 52.4	750.6 + 6.5	+ 9.3	21.70	133.2935	547	133.(3482)		3	3
1905 Jan. 23	6 7.7	756.7 — 4.4	— 1.9	21.45	133.2793	333	133.3126		3	3
					n_4—e.					
1903 Jan. 22	7 43.5	751.2 — 7.9	— 6.0	21.37	105.5505	1441	105.6946	105.6770	3	3
Dez. 28	5 7.0	755.3 — 5 8	— 4.0	21.40	105.5666	1057	105.6723		3	3
1904 Jan. 10	3 33.5	751.8 + 0.4	+ 1.3	21.50	105.5452	1189	105.6641		3-4	3
					n_4—h					
1903 Dez. 3	4 19.5	749.6 — 4.5	— 3.7	21.40	92.3351	988	92.4339	92.4391	3-4	3-4
Dez. 23	6 26.3	746.6 — 0.4	+ 0 4	21.46	92.3553	902	92.4455		4	4
1904 Febr. 4	6 8.8	739.3 + 1.3	+ 2.2	21.51	92.3586	794	92.4380		3	3
					n_4—c.					
1903 März 23	8 1.3	744.6 + 13.2	+ 15.6	21.90	126.4419	109	126.4528	126.4452	3	3
Dez. 28	5 37.5	755.2 — 6.0	— 4.5	21.40	126.4070	396	126.4466		3	3
1904 Febr. 4	5 16.3	739.1 + 0.5	+ 2 2	21.51	126.4114	248	126.4362		3	3
					n_5—e.					
1903 Jan. 22	7 34.0	751.3 — 7.8	— 6.0	21.37	103.2495	1349	103.3844	103.3815	3	3
Dez. 28	4 13.0	755.3 — 5.9	— 4.2	21.40	(103 3151)	1148	(103.4299)		3	3
1904 Jan. 10	3 40.0	751.8 + 0.3	+ 1.3	21.50	103.2638	1148	103.3786		3-4	3
					n_5—h.					
1903 März 1	8 37.8	742 6 + 3.0	+ 4.4	21.60	94.5777	1536	94.(7313)	94.7049	3	3
Dez. 3	4 26.8	749 6 — 4 5	— 3.7	21,40	94.6013	976	94.6989		3-4	3-4
Dez. 23	6 31.8	746.4 — 0.3	+ 0.4	21.46	94.6149	874	94.7023		4	4
1905 Febr. 20	6 54.5	743.5 — 0.7	+ 1.3	21.50	94 6118	884	94.7002		3	3
					n_5—c.					
1903 März 23	8 36.2	744.6 + 12.5	+ 15.0	21.90	123.7559	339	123.7898	123.7857	3	3
Dez. 28	5 50.0	755.2 — 6 0	— 4.6	21.40	123.7506	404	123.7910		3	3
1904 Febr. 4	5 27.8	739.2 + 0.7	+ 2.2	21.51	123.7505	259	123.7764		3	3
					n_6—e.					
1903 Jan. 22	7 26.0	751.6 — 7.7	— 6.0	21.37	103.2448	1319	103.3767	173.3873	3	3
Dez. 28	5 19.5	755.3 — 5.9	— 4.3	21.40	103.2898	1065	103.3963		3	3
1904 Jan. 10	3 46.0	751.8 + 0.3	+ 1.3	21.50	103.2782	1106	103.3888		3-4	3
					n_6—h.					
1903 März 1	8 44.7	742.6 + 3.0	+ 4 4	21.60	94.6031	1584	94.7615	94.7481	3	3
Dez. 3	4 33,3	749.5 — 4.5	— 3.7	21.40	94 6370	987	94.7357		3-4	3-4
Dez. 23	6 38.3	746.3 + 0.1	+ 0 5	21.46	94.6583	918	94.7501		3	3
1905 Febr. 13	5 44 2	758 5 — 10.4	— 6.2	21.35	94.6505	934	94.7439		3	3
Febr. 20	7 0.5	743.5 — 1.0	+ 1.2	21.50	94.6452	882	94.7334		3	3
					n_6—c.					
1903 März 23	8 30.2	744.6 + 12.4	+ 15.0	21.90	122.4520	283	122.4803	122 4721	3	3
Dez. 28	5 57.5	755.2 — 6.0	— 4.6	21.40	122.4325	403	122.4728		3	3
1904 Febr. 4	5 27.8	739.2 + 0.7	+ 2.2	21.51	122.4373	260	122.4633		3	3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					n_7—e.					
1903 Jan. 17	$6^h 48.5$	760.5 — 6.0	— 6.5	21.35	103.0425	+ 1185	103.1610	103.1540	3-4	4
Dez. 28	5 25.0	755.3 — 5.9	— 4.5	21.40	103.0481	1052	103.1533		3	3
1904 Jan. 10	3 51.5	752.7 + 0.3	+ 1.2	21.50	103.0403	1073	103.1476		3-4	3
					n_7—h.					
1903 Dez. 3	4 43.8	749.5 — 4.5	— 3,7	21.40	95.0091	991	95.1082	95.1194	3-4	3-4
1904 Febr. 4	6 18.3	739.3 + 1.1	+ 2.2	21.51	95.0442	791	95.1233		3	3
März 28	7 52.6	748.5 + 9.7	+ 11.6	21.70	95.0434	832	95.1266		3	3
					n_7—c.					
1903 März 21	8 43.2	753.5 + 8.2	+ 9.6	21.75	120.5280	438	102.5718	120.5715	3	3
Dez. 28	6 4.5	755.2 — 6.1	— 4.7	21.40	120.5350	359	102.5709		3	3
1904 Febr. 4	5 27.8	739.2 + 0.7	+ 2.2	21.51	120.5503	214	102.5717		3	3
					n_8—e.					
1904 Jan. 10	4 17.5	751.7 0.0	+ 1.2	21.50	89.5875	915	89.6790	89.6802	3-4	3
Dez. 14	7 21.2	738.9 + 0.8	+ 2.3	21.55	89.5840	945	89.6785		3	3
1905 Jan. 23	6 43.2	756.4 — 4.4	— 2.0	21.45	89.5945	886	89.6831		3	3
					n_8—h.					
1903 Dez. 3	5 23.8	749.2 — 4.5	— 3.7	21.40	109.7029	1049	109.8078	109.8168	3-4	3-4
1904 März 28	8 8.6	749.0 + 9.2	+ 11.0	21.70	109.6995	1393	109.(8388)		3	3
1905 Jan. 26	7 39.8	761.4 — 3.5	— 2.1	21.45	109.6738	1409	109.8147		2	2
					n_8—c.					
1904 Febr. 4	5 56.8	739.4 + 1.0	+ 2.2	21.51	136.4248	245	136.4493	136.4542	3	3
März 20	7 59.4	750.6 + 6.1	+ 8.0	21.70	136.4176	421	136.4597		3	3
1905 Jan. 23	5 59.2	756.7 — 4.3	— 1.8	21.45	136.4208	327	136.4535		3	3
					h_1—a.					
1903 Jan. 13	7 46.0	758.1 — 9.1	— 6.6	21.35	105.5675	1197	105.6872	105.6888	3	3
Febr. 19	7 2.5	757.8 — 3.0	+ 4.2	21.56	105.6060	825	105.6885		3-4	3-4
Dez. 23	5 10.3	746.8 — 1.0	— 0.5	21.46	105.5912	936	105.6848		2	3
1904 Febr. 10	5 14.6	724.8 + 3.7	+ 5.0	21.60	105.6171	777	105.6948		4	3
					h_1—b.					
1903 Febr. 16	7 26.5	760.8 — 2.7	— 0.4	21.50	113.5486	379	113.5865	113.5814	2-3	2-3
Dez. 28	6 17.0	755.2 — 6.2	— 4.7	21.40	113.5491	367	113.5858		3	3
1904 Jan. 10	6 56.5	751.2 — 0.4	+ 1.0	21.50	113.5384	334	113.5718		3	3-4
					h_1—g.					
1903 Febr. 16	8 51.0	761.3 — 4.0	— 1.1	21.50	90.9733	2375	91.2108	91.2084	2-3	2-3
Febr. 18	6 47.0	763.1 0.0	+ 1.1	21.40	91.1241	847	91.2088		2	2
Dez. 28	8 5.0	754.9 — 7.8	— 5.5	21.40	91.0565	1525	91.2090		3	3
1904 Jan. 10	5 49.0	751.5 — 0.4	+ 1.1	21.50	91.1393	658	91.2051		3	3
					h_2—a.					
1903 Jan. 13	7 55.7	758.1 — 9.1	— 6.6	21.35	111.6844	1317	111.8161	111.8270	3	3
März 28	8 58.5	750.0 + 8.0	+ 9.8	21.70	111.6697	1849	111.8346		3-4	4
Dez. 23	5 15.3	746.8 — 0.9	— 0.6	21.46	111.7390	1012	111.8402		2	3
1904 Febr. 10	5 30.0	724.8 + 3.7	+ 5.0	21.60	111.7482	788	111.8270		4	3
Febr. 17	6 0.6	724.8 + 3.0	+ 3.6	21.58	111.7391	781	111.8172		3	4

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					h_2—b.					
1903 Febr. 16	7h35.2	760.6 — 2.8	— 0.7	21.50	113.1705	+ 355	113.2061	113.2181	2-3	2-3
Dez. 28	6 2.3	755.1 — 6.3	— 4.7	21.40	113.1890	368	113.2258		3	3
1904 Jan. 10	7 2.0	751.1 — 0.4	+ 0.9	21.50	113.1911	314	113.2225		3	3
					h_2—g.					
1903 Febr. 18	6 56.2	763.1 0.0	+ 1.1	21.50	96.5168	919	96.6087	96.6090	2	2
Dez. 28	8 12.0	754.9 — 7.3	— 5.5	21.40	96.4366	743	96.6109		3	3
1904 Jan. 10	5 54.0	751.3 — 0.4	+ 1.1	21.50	96.5351	724	96.6075		3	3
					h_3—a.					
1903 Jan. 13	8 6.2	758.2 — 9.2	— 6.7	21.35	109.8365	1546	109.(9911)	110.0134	3	3
Dez. 23	5 21.8	746.8 — 0.9	— 0.6	28.46	109.9193	995	110.0188		2	3
1904 Febr. 17	6 9.6	724.8 + 2.9	+ 3.6	21.58	109.9439	827	110.0266		3	3
1905 Febr. 13	5 11.2	758.4 — 10.1	— 4.5	21.45	109.9061	997	110.0058		4	4
					h_3—b.					
1903 Febr. 16	7 44.0	760.9 — 3.2	+ 0.1	21.50	96.7761	358	96.8119	96.8036	2-3	2-3
Dez. 28	6 30.5	755.1 — 6.4	— 4.7	21.40	96.7643	319	96.7962		3	3
1904 Jan. 10	7 8.0	751.1 — 0.4	+ 0.9	21.50	96.7743	279	96.8027		3	3
					h_3—g.					
1903 Febr. 18	7 6.5	763.1 — 0.2	+ 1.1	21.50	105.8949	981	105.9930	106.0004	2	2
Dez. 28	8 21.5	754.9 — 7.3	— 5.6	21.40	105.8127	1995	106.0122		3	3
1904 Jan. 10	6 0.5	751.3 — 0.4	+ 1.1	21.50	105.9252	707	105.9959		3	3
					h_4—a.					
1903 Jan. 13	8 18.7	758.2 — 9.4	— 6.7	21.35	119.6718	1423	119.(8141)	119.8278	3	3
Dez. 23	5 29.3	746.8 — 0.5	— 0.6	21.46	119.7258	1057	119.8315		2	3
1904 Febr. 17	6 37.1	724.8 + 2.4	+ 3.5	21.58	119.7499	855	119.8354		3	3
1905 Febr. 13	5 20.7	758.4 — 10.2	— 5.0	21.45	119.7123	1111	119.8234		3	3
					h_4—b.					
1903 Febr. 16	7 57.7	760.9 — 3.3	0.0	21.50	122.0555	456	122.1011	122.0947	2-3	2-3
Dez. 28	6 37.0	755.1 — 6.5	— 4.8	21.40	122.0486	405	122.0891		3	3
1904 Jan. 10	7 14.5	751.0 — 0.5	+ 0.8	21.50	122.0573	365	122.0938		3	3
					h_4—g.					
1903 Febr. 18	7 19.8	763.1 — 0.8	+ 1.2	21.50	97.9350	944	98.0294	98.0421	2	2
Dez. 28	8 28.5	754.8 — 7.3	— 5.6	21.40	97.8411	2057	98.0468		3	3
1904 Jan. 10	6 6.0	751.3 — 0.4	+ 1.1	21.50	97.9692	810	98.0502		3	3
					h_5—a.					
1904 Febr. 17	6 20.1	724.8 + 2.8	+ 3.6	21.58	118.0159	782	118.0941	118.0839	3	3
März 16	8 4.5	750.3 + 1.2	+ 2.1	21.50	117.9813	1036	118.0849		2-3	2-3
März 28	8 47.6	749.8 + 8.3	+ 10.1	21.70	117.9576	1151	118.0727		3-4	4
					h_5—b.					
1903 Febr. 16	8 16.7	761.0 — 4.0	— 0.4	21.50	127.8250	608	127.8858	127.8685	2-3	2-3
Dez. 28	6 45.0	755.0 — 6.8	— 4.8	21.40	127.8218	396	127.8614		3	3
1904 Jan. 10	7 19.5	750.9 — 0.5	+ 0.7	21.50	127.8268	401	127.8669		3	3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	S.
					h_6—g.					
1903 Febr. 18	7h27.5	763.1 — 0.4	+ 1.2	21.50	92.4194	+ 1103	92.5297	92.5386	2	2
Dez. 28	2 42.5	754.8 — 7.4	— 5.7	21.40	92.3218	2227	92.5445		3	3
1904 Jan. 10	6 12.0	751.2 — 0.4	+ 1.1	21.50	92.4528	719	92.5247		3	3
1905 Febr. 13	4 42.5	758.3 — 9.1	— 2.6	21.45	92.4676	910	92.5586		3	3-4
					h_8—a.					
1904 Febr. 17	6 26.6	724.8 + 2.7	+ 3.5	21.58	111.1349	683	111.2032	111.2185	3	3
März 16	8 9.0	750.3 + 1.2	+ 2.1	21.50	111.1374	855	111.2229		2-3	2-3
März 28	8 52.6	749.9 + 8.1	+ 9.9	21.70	111.1056	1030	111.2086		3-4	4
1905 Febr. 13	5 31.2	758.4 — 10.3	— 5.6	21.35	111.1446	947	111.2393		3	3
					h_8—b.					
1903 Febr. 16	8 31.7	761.2 — 4.4	— 0.7	21.50	131.9223	874	132.(0097)	131.9840	2-3	2-3
Dez. 28	6 51.5	755.0 — 7.1	— 4.8	21.40	131.9356	409	131.9765		3	3
1904 Jan. 10	7 25.0	750.8 — 0.5	+ 0.6	21.50	131.9473	311	131.9784		3	3
					h_8—g.					
1903 Febr. 18	7 40.0	763.1 — 0.5	+ 1.2	21.50	82.9608	1082	83.0690	83.0681	2	2
Dez. 28	8 45.0	754.8 — 7.4	— 5.7	21.40	82.8628	2030	83.0658		3	3
1904 Jan. 10	6 16.5	751.2 — 0.4	+ 1.0	21.50	82.9978	717	83.0695		3	3
					i_1—e.					
1903 März 1	8 11.8	742.7 + 3.1	+ 4.8	21.60	59.0887	814	59.1701	59.1865	3	3
März 17	7 15.3	748.9 + 5.8	+ 8.9	21.70	59.1308	553	59.1861		4	4
Oct. 25	6 6.0	743.0 + 4.7	+ 7.4	21.50	59.1330	579	59.1909		3	3
1904 Jan. 10	8 0.0	751.8 + 0.6	+ 1.3	21.50	59.1186	722	59.1908		3-4	3
					i_1—f.					
1903 März 13	7 16.0	749.3 + 2.7	+ 5.1	21.60	82.0730	574	82.1304	82.1416	3	3
Oct. 25	7 40.0	743.1 + 4.5	+ 6.7	21.50	82.0806	815	82.1621		3	2-3
Dez. 30	6 53.5	751.2 — 10.4	— 7.9	21.35	82.0651	661	82.1312		4	3
1904 Jan. 2	7 25.6	752.1 — 7.4	— 6.3	21.45	82.0644	838	82.1482		6	3
					i_1—g.					
1903 März 14	7 32.0	749.6 + 1.6	+ 5.8	21.60	72.7439	176	72.7615	72.7567	3	3
Dez. 30	7 31.5	750.5 — 10.4	— 8.3	21.35	72.7163	343	72.7506		4	3
1904 Febr. 4	4 23.8	739.1 + 1.8	+ 2.8	21.51	72.6989	591	72.7580		3	3
					i_2—e.					
1903 März 17	7 22.8	748.9 + 5.8	+ 8.6	21.70	57.2547	521	57.3068	57.3041	3	3
Oct. 25	5 24.0	743.0 + 4.9	+ 7.4	21.50	57.2438	572	57.3010		3	3
1904 Jan. 10	8 6.4	751.8 + 0.6	+ 1.3	21.50	57.2268	778	57.3046		3-4	3
					i_2—f.					
1903 März 13	7 24.0	749.3 + 2.5	+ 5.0	21.60	76.5462	617	76.6079	76.6087	3	3
Oct. 25	7 16.0	743.1 + 4.5	+ 7.0	21.50	76.5325	701	76.6026		3	2-3
Dez. 30	7 0.5	751.1 — 10.4	— 8.0	21.35	76.5437	681	76.6118		4	3
1904 Jan. 2	7 34.1	752.2 — 7.1	— 6.8	21.45	76.5302	822	76.6124		3	3
					i_2—g.					
1903 März 14	7 39.0	749.6 + 1.5	+ 5.6	21.60	70.0388	217	70.0605	70.0547	3	3
Dez. 30	7 5.0	750.6 — 10.5	— 8.4	21.35	70.0022	205	70.0427		4	3
1904 Febr. 4	4 30.8	739.1 + 1.6	+ 0.6	21.51	70.0113	496	70.0609		3	3

Datum	Stern-zeit	Barometer und Luft-temperatur	J.	Ocular-Stellung	Ge-messene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	S
					$i7_1$—e.					
1903 März 17	8h 0.8	748.9 + 5.0	+ 7.8	21.70	50.5276	+ 557	50.5833	50.5672	2-3	2-3
Oct. 25	6 20.5	743.0 + 4.8	+ 7.4	21.50	50.5124	473	50.5597		3	3
1904 Jan. 10	3 14.4	751.8 + 0.5	+ 1.3	21.50	50.4942	645	50.5587		3-4	3
					$i7_1$—f.					
1903 März 13	7 47.0	749.4 + 2.0	+ 4.8	21.60	70.3568	669	70.4237	70.4155	3	3
Dez. 30	7 13.0	751.0 — 10.4	— 8.1	21.35	70.3451	636	70.4087		4	3
1904 Jan. 2	7 44.6	752.2 — 6.9	— 6.4	21.45	70.3373	768	70.4141		3	3
					$i7_1$—g.					
1903 März 14	8 21.0	749.7 + 0.7	+ 4.6	21.60	73.3723	338	73.4061	73.4071	3	3
Dez. 30	8 14.0	750.7 — 10.5	— 8.5	21.35	73.3578	486	73.4064		4	3
1904 Febr. 4	4 41.8	739.1 + 1.0	+ 2.5	21.51	73.3543	545	73.4088		3	3
					$i7_2$—e.					
1903 März 17	8 0.8	748.9 + 5.0	+ 7.8	21.70	49.8981	554	49.9535	49.9478	2-3	2-3
Oct. 25	6 20.5	743.0 + 4.8	+ 7.4	21.50	49.8840	476	49.9316		3	3
1904 Jan. 10	8 14.4	751.8 + 0.5	+ 1.3	21.50	50.8942	642	49.9584		3-4	3
					$i7_2$—f.					
1903 März 13	7 47.0	749.4 + 2.0	+ 4.8	21.60	69.4912	692	69.5604	69.5601	3	3
Dez. 30	7 13.0	751.0 — 10.4	— 8.1	21.35	69.4981	675	69.5596		4	3
1904 Jan. 2	7 44.6	752.2 — 6.9	— 6.4	21.45	69.4845	557	69.5602		3	3
					$i7_2$—g.					
1903 März 14	8 21.0	749.7 + 0.7	+ 4.6	21.60	73.5443	343	73.5786	73.5769	3	3
Dez. 30	7 14.0	750.7 — 10.5	— 8.5	21.35	73.5116	495	73.5611		4	3
1904 Febr. 4	4 41.8	739.1 + 1.0	+ 2.5	21.51	73.5367	544	73.5911		3	3
					i_8—e.					
1903 März 17	8 14.8	748.9 + 4.7	+ 7.2	21.70	47.7893	646	47.8539	47.8514	2-3	2-3
Oct. 25	6 31.0	743.0 + 4.7	+ 7.3	21.50	47.7979	464	47.8443		3	3
1904 Jan. 10	8 23.0	751.8 + 0.5	+ 1.3	21.50	47.7976	585	47.8561		3-4	3
					i_8—f.					
1903 März 13	7 57.0	749.5 + 1.7	+ 4.6	21.60	73.3571	706	73.4277	73.4354	3	3
Dez. 30	7 22.0	750.9 — 10.4	— 8.2	21.35	73.3608	771	73.4379		4	3
1904 Jan. 2	7 59.1	752.2 — 6.1	— 6.5	21.45	73.3548	858	73.4406		3	3
					i_8—g.					
1903 März 14	8 30.5	749.7 + 0.5	+ 4.4	21.60	78.4980	319	78.5299	78.5361	3	3
Dez. 30	8 23.0	750.7 — 10.5	— 8.5	21.35	78.4946	465	78.5411		4	3
1904 Febr. 4	5 1.3	739.1 + 0.5	+ 2.2	21.51	78.4856	578	78.5434		3	3
					k_1—a.					
1903 Jan. 31	7 15.8	748.6 + 1.1	+ 2.3	21.50	75.3008	644	75.3652	75.3748	3	3
Dez. 3	5 38.3	749.1 — 4.5	— 3.7	21.40	75.2944	755	75.3699		3-4	3-4
Dez. 28	5 47.8	746.8 — 0.5	— 0.5	21.46	75.3211	681	75.3892		2	3
					k_1—b.					
1903 Febr. 6	8 32.5	753.1 + 1.0	+ 2.0	21.47	118.8208	1327	118.9535	118.9568	3	3
Dez. 28	7 14.5	752.0 — 7.1	— 4.8	21.40	118.8886	741	118.9627		3	3
1904 Jan. 10	7 36.5	750.8 — 0.5	+ 0.6	21.50	118.8783	759	118.9542		3-4	3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					$k_1 - g.$					
1904 Jan. 10	4h46.0	751.6 — 0.1	+ 1.2	21.50	67.8518	+ 295	67.8813	67.8842	3	3
Jan. 23	3 49.0	761.4 — 6.3	— 3.0	21.44	67.8583	263	67.8846		3	3
März 26	8 47.3	748.4 + 8.0	+ 9.6	21.70	67.7471	1396	67.8867		3	3
					k_1—a.					
1903 Jan. 31	7 25.0	748.6 + 1.0	+ 2.2	21.50	72.3833	657	72.4490	72.4534	3	3
Dez. 3	5 45.8	749.0 — 4.5	— 3.7	21.40	72.3826	707	72.4533		3-4	3-4
Dez. 23	5 58.3	746.7 — 0.4	— 0.1	21.46	72.3939	639	72.4578		2	3
					k_1—b.					
1903 Febr. 6	8 39.7	753.1 + 0.8	+ 2.0	21.47	113.5728	1455	113.7183	113.7206	3	3
Dez. 28	7 21.5	755.0 — 7.1	— 4.9	21.40	113.6391	741	113.7132		3	3
1904 Jan. 10	8 1.5	750.6 — 0.5	+ 0.6	21.50	113.6348	956	113.7304		3-4	3
					k_2—g.					
1904 Jan. 10	5 8.0	751.6 — 0.3	+ 1.1	21.50	71.5373	325	71.5698	71.5652	2-3	2-3
Jan. 23	4 11.0	761.3 — 6.4	— 3.2	21.44	71.5284	254	71.5538		3	3
März 28	8 28.6	749.4 + 8.6	+ 10.5	21.70	71.4713	1073	71.5786		3	3
					k_2—a.					
1903 Jan. 31	7 32.5	748.6 + 0.9	+ 2.2	21.50	74.4751	693	74.5444	74.5556	3	3
Dez. 3	5 50.3	749.0 — 4.6	— 3.8	21.40	74.4763	738	74.5501		3-4	3-4
Dez. 23	5 53.3	746.7 — 0.5	— 0.3	21.46	74.5060	662	74.5722		2	3
					k_2—b.					
1903 Febr. 6	8 47.2	753.2 + 0.7	+ 2.0	21.47	115.1682	1550	115.3232	115.3153	3	3
Dez. 28	7 28.5	755.0 — 7.1	— 5.0	21.40	115.2395	793	115.3188		3	3
1904 Jan. 10	7 46.0	750.7 — 0.5	+ 0.6	21.50	115.2216	823	115.3039		3-4	3
					k_3—g.					
1904 Jan. 10	4 59.5	751.6 — 0.2	+ 1.1	21.50	70.7850	300	70.8150	70.8185	2-3	2-3
Jan. 23	4 4.0	761.4 — 6.4	— 3.1	21.44	70.7883	274	70.8157		3	3
März 28	8 23.1	749.3 + 8.8	+ 10.6	21.70	70.7249	999	70.8248		3	3
					k_3—a.					
1903 Jan. 31	8 1.5	748.7 + 0.7	+ 1.9	21.50	86.4221	759	86.4980	86.5024	3	3
Dez. 3	5 56.8	748.9 — 4.7	— 3.9	21.40	86.4210	784	86.4994		3-4	3-4
Dez. 23	6 9.3	746.7 — 0.4	+ 0.1	21.46	86.4415	684	86.5099		2	3
					k_3—b.					
1903 Dez. 28	7 37.5	755.0 — 7.2	— 5.1	21.40	122.8801	872	122.9673	122.9664	3	3
1904 Jan. 10	7 59.0	750.6 — 0.5	+ 0.6	21.50	122.8738	865	122.9603		3-4	3
März 20	8 17.4	750.6 + 5.8	+ 8.8	21.70	122.8886	831	122.9717		3	3
					k_4—g.					
1904 Jan. 10	5 16.0	751.6 — 0.3	+ 1.1	21.50	70.0925	372	70.1297	70.1292	2-3	2-3
Jan. 23	4 20.0	761.3 — 6.5	— 3.4	21.44	70.0920	388	70.1308		3	3
1905 Febr. 13	4 54.5	758.3 — 9.8	— 3.2	21.45	70.0860	411	70.1271		3	3-4
					k_4—a.					
1904 Jan. 30	7 34.1	744.2 + 0.5	+ 1.4	21.50	97.4384	845	97.5229	97.5319	2	2-3
März 16	8 18.0	750.3 + 1.1	+ 2.0	21.50	97.4365	1011	97.5376		2-3	2-3
1905 Jan. 23	4 38.2	756.8 — 3.7	— 1.0	21.45	97.4365	958	97.5323		3	3

Datum	Stern-zeit	Barometer und Luft-temperatur	J.	Ocular-Stellung	Ge-messene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					k_8—b.					
1904 Jan. 10	8h 4.5	750.5 — 0.5	+ 0.8	21.50	117.5870	+ 711	117.6581	117.6577	3-4	3
Jan. 30	7 41.6	744.0 + 0.5	+ 1.4	21.50	117.6092	541	117.6633		2	2-3
März 20	8 25 9	750.8 + 5.5	+ 8.5	21.70	117.5805	711	117.6518		3	3
					k_8—g.					
1904 Jan. 10	5 21.5	751.5 — 0.4	+ 1.1	21.50	81.8610	520	81.9130	81.9055	2-3	2-8
Jan. 23	4 27.5	781.2 — 8 8	— 3.6	21.44	81 8330	496	81.8826		3	3
März 28	8 37.8	749.8 + 8.5	+ 10.8	21.70	81.7620	1588	81.9208		3-4	8
					k_{10}—a.					
1903 Dez. 8	6 4.8	748.8 — 5.4	— 4.0	21.40	86.3926	877	86.4603	86.4615	3-4	3-4
Dez. 23	6 13.3	746.8 — 0.4	+ 0.3	21.46	86.4181	600	86 4781		2	3
1905 Jan. 8	5 58.9	753.5 + 0.3	+ 1.3	21.52	86.3878	586	86.4462		4	3-4
					k_{10}—b.					
1903 Dez. 28	7 46.0	755.0 — 7.2	— 5.5	21.40	139.2108	989	139.3097	139.3207	3	8
1904 Jan. 10	8 11.0	750.5 — 0.5	+ 0.8	21.50	139.2112	1101	139.3213		3-4	3
Jan. 23	8 46.5	760.8 — 8.0	— 5.8	21.44	139.1610	1806	139.3418		3	3
					k_{10}—g.					
1904 Jan. 10	5 27.5	751.5 — 0.4	+ 1.1	21.50	56.0240	369	56.0609	56.0540	2-3	2-3
Jan. 23	4 35.0	761.6 — 6.9	— 3.8	21.44	56.0149	363	56.0512		8	3
1905 Jan. 7	5 48.7	752.9 — 0.3	+ 0.5	21.51	56.0089	411	56.0500		8	3-4
					m_1—d.					
1903 März 12	7 34.2	749.7 + 8.5	+ 4.9	21.60	62.9112	406	62.9518	62.9544	3-4	3-4
März 22	8 25.5	751.9 + 10.4	+ 12.8	21.80	62.9096	418	62.9514		3-4	3-4
Dez. 28	7 7.3	745.9 + 0.2	+ 0.5	21.46	62.9118	482	62.9600		4	4
					m_1—e.					
1904 Jan. 23	5 30.0	761.1 — 7.0	— 3.9	21.44	76.4865	502	76.5367	76.5444	3	3
Jan. 30	6 29.1	744.8 + 0.5	+ 1.5	21.50	76.4870	587	76.5457		2	2-3
Dez. 14	7 39.2	738.9 + 0.8	+ 2.3	21.55	76.4552	955	76.5507		8	8
					m_1—c.					
1904 Jan. 23	5 50.0	760.0 — 7.1	— 4.2	21.44	83.6060	522	83.6582	83.6561	3	3
Jan. 27	7 30.0	753.6 — 8.7	— 4.8	21.45	83.5926	631	83.6557		3-4	3
März 16	8 39.0	750.3 + 0.9	+ 2.0	21.50	83.5358	1186	83.6544		2-3	2-3
					m_2—d.					
1903 März 12	7 41.2	749.7 + 3.5	+ 4.8	21.60	64.5883	184	64.6067	64.6055	3-4	3-4
März 22	8 17.4	751.9 + 10.5	+ 12.8	21.80	64.5949	100	64.6049		3-4	3-4
1904 Dez. 21	8 4.0	757.7 — 2.4	— 0.7	21.47	65.5693	357	64.6050		8	3
					m_2—e.					
1904 Jan. 23	5 23.5	761.2 — 6.9	— 8.8	21.44	55.4575	394	55.4969	55.4978	8	3
Jan. 30	8 24.8	744.8 + 0.5	+ 1.5	21.50	55.4401	438	55.4839		2	2-3
Dez. 14	7 34.2	738.9 + 0.8	+ 2.3	21.55	55.4428	695	55.5121		3	3
					m_2—c.					
1904 Jan. 23	5 41.5	781.0 — 7.0	— 4.0	21.44	105.8386	417	105.8803	105.8908	3	3
Jan. 27	7 23.5	753.8 — 6.6	— 4.7	21.45	105.8101	816	105.8917		3-4	3
März 16	8 32.0	750.3 + 0.9	+ 2.0	21.50	105.7540	1463	105.9003		2-3	2-3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					m_2—c.					
1904 Jan. 23	5h 59.5	761.0 — 7.1	— 4.4	21.44	49.9402	+ 250	49.9652	49.9622	3	3
Jan. 27	7 38.5	753.5 — 7.0	— 4.9	21 45	49.9081	501	49.9582		3-4	3
März 16	8 45.5	750.4 + 0.5	+ 1.9	21.50	49.8671	962	49.9633		3	3
					m_2—d.					
1904 Jan. 23	6 20.5	761.0 — 7.2	— 4.6	21.44	61.7019	627	61.7646	61.7649	3	3
Jan. 30	7 13.6	744.5 + 0.5	+ 1.5	21.50	61.6842	652	61.7494		2	2-3
1905 Jan. 26	6 54 8	761.5 — 3.0	— 2.0	21.45	61.7070	660	61 7730		2	2
					m_2—a.					
1904 Jan. 23	6 28.5	760.9 — 7.3	— 4.7	21.44	67.3782	181	67.3963	67.3949	3	3
Jan. 30	7 22.1	744.4 + 0.5	+ 1.4	21.50	67.3764	125	67.3889		2	2-3
1905 Jan. 26	7 3.8	761.5 — 3.0	— 2.0	21.45	67.3838	156	67.3994		3	3
					o_1—a.					
1903 Dez. 30	6 22.0	751.6 — 10.3	— 7.7	21.35	71.0210	713	71.0923	71.0954	4	3
1904 Jan. 23	8 21.0	760.4 — 7.8	— 5.4	21.44	70.9613	1349	71.0962		3	3
März 31	8 26.0	743.6 + 3.1	+ 7.4	21.70	70.9766	1210	71.0976		3-4	3-4
					o_1—h.					
1903 Dez. 30	5 16.0	751.6 — 10.1	— 7.3	21.35	69.4925	484	69.5409	69.5352	4	3
1904 Jan. 23	7 46.0	760.6 — 7.6	— 5.0	21.44	69.5007	297	69.5304		3	3
Dez. 21	6 25.5	757.7 — 2.4	— 0.7	21.47	69.4992	352	69.5344		3	3
					o_1—c.					
1903 Dez. 30	5 53.0	751.6 — 10.3	— 7.5	21.35	92.4880	517	92.5397	92.5478	4	3
1904 Jan. 23	7 3.0	760.8 — 7.4	— 4.8	21.44	92.5175	345	92.5520		3	3
März 22	7 35.0	749 3 + 4.5	+ 7.5	21.80	92.5038	463	92.5501		3	3
					o_2—a.					
1903 Dez. 30	6 16.5	751.6 — 10.3	— 7.6	21.35	83.4497	824	83.5321	83.5334	4	3
1904 Jan. 23	8 14.0	760.5 — 7.7	— 5.2	21.44	83.3938	1481	83.5419		3	3
März 31	8 22.7	743.7 + 3.5	+ 8.0	21.70	83.3883	1380	83.5263		3-4	3-4
					o_2—h.					
1903 Dez. 30	5 11.0	751.6 — 10.1	— 7.2	21.35	66.8051	400	66.8451	66.8438	4	3
1904 Jan. 23	7 40.0	760.6 — 7.5	— 4.9	21.44	66.8166	210	66.8376		3	3
Dez. 21	6 32.0	757.7 — 2.4	— 0.7	21.47	66.8238	248	66.8486		3	3
					o_2—c.					
1903 Dez. 30	5 59.0	751.6 — 10.3	— 7.6	21.35	95.0029	497	95.0526	95.0607	4	3
1904 Jan. 23	6 54.0	760.9 — 7.3	— 4.7	21.44	95.0278	451	95.0729		3	3
März 22	7 44.0	749.2 + 4.5	+ 7.3	21.80	95.0018	549	95.0567		3	3
					o_3—a.					
1903 Dez. 30	6 31.5	751.4 — 10.3	— 7.8	21.35	73.2691	663	73.3354	73.3338	4	3
1904 Jan. 23	8 28.5	760.4 — 7.8	— 5.4	21.44	73.1914	439	73.3353		3	3
März 31	8 30.5	743.6 + 2.5	+ 7.3	21.70	73.2080	226	73.3306		3	2-3
					o_3—h.					
1903 Dez. 30	5 22.0	751.6 — 10.1	— 7.3	21.35	89.7586	568	89.8154	89.8184	4	3
1904 Jan. 23	7 52.0	760 5 — 7.6	— 5.1	21.44	89.7878	347	89.8225		3	3
Dez. 21	6 40.0	757.5 — 2.3	— 0.7	21.47	89.7781	391	89.8172		3	3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					o_3—c.					
1903 Dez. 30	5^h 47.5	751.6 — 10.3	— 7.5	21.35	71.6890	+ 415	71.7305	71.7332	4	3
1904 Jan. 23	7 15.5	760.6 — 7.5	— 4.9	21.44	71.7085	248	71.7333		3	3
1905 Jan. 23	5 45.2	756.7 — 4.1	— 1.6	21.45	71.7028	330	71.7358		3	3
					o_4—a.					
1903 Dez. 30	6 49.0	751.3 — 10.8	— 7.9	21.35	74.5695	588	74.6283	74.6136	4	3
1904 Jan. 23	8 39.5	760.4 — 7.9	— 5.6	21.44	74.4715	1349	74.6064		3	3
März 31	8 35.0	743.7 + 2.0	+ 7.1	21.70	74.4935	1127	74.6062		3	2-3
					o_4—h.					
1903 Dez. 30	5 30.0	751.6 — 10.2	— 7.4	21.35	108.6255	659	108.6914	108.6896	4	3
1904 Jan. 23	8 0.0	760.6 — 7.7	— 5.2	21.44	108.6566	379	108.6945		3	3
Dez. 29	6 46.5	757.5 — 2.3	— 0.7	21.47	108.6373	457	108.6830		3	3
					o_4—c.					
1903 Dez. 30	5 40.0	751.6 — 10.2	— 7.5	21.35	52.9043	298	52.9341	52.9337	4	3
1904 Jan. 23	7 22.5	760.6 — 7.5	— 4.9	21.44	52.9115	170	52.9285		3	3
1905 Jan. 23	5 35.7	756.7 — 4,1	— 1.5	21.45	52.9178	212	52.9390		3	3
					d_1—a.					
1904 Jan. 27	5 53.0	754.2 — 6.5	— 4.2	21.45	77.9270	555	77.9825	77.9957	3-4	3-4
Jan. 30	4 30.6	745.8 + 1.5	+ 2.0	21.50	77.9291	670	77.9961		2	2-3
März 31	8 50.2	743.7 + 2.6	+ 6.7	21.70	77.9585	499	78.0084		3	2-3
					d_1—c.					
1904 Jan. 27	6 21.0	754.1 — 6.5	— 4.5	21.45	98.0380	743	98.1123	98.1006	3	3-4
Jan. 30	5 8.1	745.6 + 1.0	+ 1.8	21.50	98.0475	425	98.0900		2	2-3
März 26	8 22.3	748.3 + 8.8	+ 10.0	21.70	97.9596	398	98.0994		3	3
					d_1—e.					
1904 Jan. 27	6 44.5	753.9 — 6.5	— 4.6	21.45	66.4740	250	66.4990	66.4926	3-4	3-4
Jan. 30	5 29.1	745.3 + 0.7	+ 1.7	21.50	66.4678	134	66.4812		2	2-3
1905 Jan. 26	7 14.5	761.4 — 3.1	— 2.0	21.45	66.4671	304	66.4975		2	2
					d_2—a.					
1904 Jan. 27	5 3.5	754.3 — 6.5	— 4.1	21.45	98.2308	632	98.2940	98.3001	3-4	3-4
Jan. 30	4 35.6	745.7 + 1.5	+ 2.0	21.50	98.2242	746	98.2988		2	2-3
März 31	8 43.7	743.7 + 2.7	+ 6.9	21.70	98.2728	347	98.3075		3	2-3
					d_2—c.					
1904 Jan. 27	6 28.0	754.0 — 6.5	— 4.5	21.45	93.6161	906	93.7067	93.7080	3	3-4
Jan. 30	5 14.1	745.5 + 0.9	+ 1.8	21.50	93.6400	680	93.7080		2	2-3
März 26	8 16.8	748.3 + 9.0	+ 10.2	21.70	93.5608	486	93.7094		3	3
					d_2—e.					
1904 Jan. 27	6 37.0	754.0 — 6.5	— 4.5	21.45	86.9097	258	86.9355	86.9353	3	3-4
Jan. 30	5 24.1	745.4 + 0.8	+ 1.7	21.50	86.9263	158	86.9421		2	2-3
1905 Jan. 26	7 23.8	761.4 — 3.2	— 2.0	21.45	86.8945	339	86.9284		2	2
					ds_4—a.					
1904 Jan. 30	4 45.1	745.7 + 1.5	+ 2.0	21.50	63.6963	395	63.7358	63.7296	2	2-3
März 31	9 0.7	743.7 + 2.5	+ 6.5	21.70	63.7105	102	63.7207		3	2-3
1905 Jan. 23	4 51.2	756.8 — 3.8	— 1.1	21.45	63.6896	428	63.7324		3	3

Datum	Sternzeit	Barometer und Lufttemperatur	J.	Ocular-Stellung	Gemessene Distanz	Σ corr.	Red. Distanz	Mittel	Bildgüte R.	Bildgüte S.
					ds_a—c.					
1904 Jan. 30	5h 0.6	745.6 + 1.2	+ 1.8	21.50	76.6408	+ 333	76.6741	76.6752	2	2-3
März 26	8 31.3	748.4 + 8.5	+ 10.0	21.70	76.5488	1242	76.6730		3	3
1905 Jan. 23	8 23.2	756.7 — 4.0	— 1.4	21.45	76 6379	405	76.6784		3	3
					ds_a—d.					
1904 Jan. 30	5 39.6	745.2 + 0.6	+ 1.6	21.50	40.2310	317	40.2627	40.2606	2	2-3
Dez. 21	5 52.0	757.8 — 2.4	— 0.7	21.47	40.2271	356	40.2627		3	3
1905 Jan. 23	5 7.7	756.7 -- 3.8	— 1.3	21.45	40.2195	368	40.2563		3	3
					ds_b—a.					
1904 Jan. 27	6 1.5	754.2 — 6.5	— 4.3	21.45	69.7239	325	69.7564	69.7605	3-4	3-4
Jan. 30	4 45.1	745.7 + 1.5	+ 2.0	21.50	69 7194	415	69.7609		2	2-3
März 31	8 56.0	743.7 + 2.6	+ 6.7	21.70	69.7550	92	69.7642		3	2-3
					ds_b—c.					
1904 Jan. 27	6 14.5	754.1 — 6.5	— 4.4	21.45	74.4818	559	74.5377	74.5352	3-4	3-4
Jan. 30	5 0.6	745.6 + 1.2	+ 1.8	21.50	74.5020	380	74.5400		2	2-3
März 26	8 31.3	748.4 + 8.5	+ 10.0	21.70	74.3932	1274	74.5206		3	3
					ds_b—d.					
1904 Jan. 27	7 0.5	753.8 — 6.5	— 4.7	21.45	36.8843	323	36.9166	36.9116	3	3-4
Jan. 30	5 39.6	745.2 + 0 6	+ 1.6	21.50	36 8808	290	39.9098		2	2-3
1905 Jan. 23	5 7.7	756.7 — 3.8	— 1.3	21.45	36.8763	322	36.9085		3	3
					r_1—a.					
1904 Jan. 2	5 53.1	751.9 — 7.5	— 5.9	21.45	56.6856	555	56.7411	56.7324	3	3
Jan. 27	4 49.0	754.5 — 6.1	— 3.4	21.45	56.6738	527	5.67265		3-4	3-4
1905 Jan. 26	5 57.3	761.5 — 2.4	— 1.6	21.45	56.6768	528	56.7296		2	2
					r_1—d.					
1904 Jan. 27	5 13.0	754.3 — 6.3	— 3.8	21.45	64 9388	254	64.9642	64.9675	3-4	3-4
Jan. 30	6 12.1	745.0 + 0.6	+ 1.6	21.50	64.9598	156	64.9754		2	2-3
1905 Jan. 26	6 32.8	761.5 — 2.7	— 1.9	21.45	64.9456	163	64.9629		2	2
					r_1—f.					
1904 Jan. 2	6 47.6	752.0 — 7.5	— 6.1	21.45	62.7321	306	82.7627	82.7619	3	3
Jan. 27	5 21.0	754.3 — 6.4	— 4.0	21.45	62.7371	196	82.7567		3-4	3-4
1905 Jan 26	6 21.8	761.5 — 2.6	— 1.6	21.45	82.7441	223	82.7664		2	2
					r_2—a.					
1904 Jan. 2	6 51.1	751.9 — 7.5	— 6.0	21.45	72.6861	756	72.7617	72.7588	3	3
Jan. 27	4 57.0	754.4 — 6 2	— 3.5	21.45	72.6973	677	72.7650		3-4	3-4
1905 Jan. 26	6 3.3	761.5 — 2.5	— 1.7	21.45	72.6824	674	72.7498		2	2
					r_2—d.					
1904 Jan. 27	5 6.0	754.4 — 6.3	— 3.6	21.45	48.5125	91	48.5216	48.5244	3-4	3-4
Jan. 30	6 3.6	745.0 + 0.6	+ 1.6	21.50	48.5200	42	48.5242		2	2-3
1905 Jan. 26	6 45.3	761.5 — 2.9	— 2.0	21.45	48.5210	64	48.5274		2	2
					r_2—f.					
1904 Jan. 2	6 57.1	752.1 — 7.5	— 6.2	21.45	94.0239	265	94.0504	94.0543	3	3
Jan. 27	5 28.0	754.3 — 6.5	— 4.1	21.45	94.0350	228	94.0578		3-4	3-4
1905 Jan. 26	6 13.3	761.5 — 3.5	— 1.8	21.45	94.0316	231	94.0547		2	2

In der beigegebenen Skizze sind die Sterne in der Umgegend des Orion-Nebels eingetragen, welche in die Messung mit einbegriffen sind. Die durch gerade Linien verbundenen Sterne sind die eines Hauptnetzes, das für sich ausgemessen und in der Rechnung einheitlich ausgeglichen wurde. An diese Sterne wurden dann die dazwischen liegenden durch je drei Distanzen angeschlossen. Es wurden alle Distanzen möglichst so gewählt, dass sie etwa von gleicher Grössenordnung waren, um eventuell noch vorhandene von der Grösse der Distanz abhängende systematische Fehler unschädlich zu machen.

Für das Hauptnetz wurden die Sterne so gewählt, dass 7 äussere Sterne an einen Centralstern und jeder an die zwei ihm unmittelbar benachbarten angeschlossen wurde. Es entsteht so ein Netz von 14 Distanzen, das demnach nur mit einer Distanz überbestimmt ist. Es wäre besser gewesen, auch einige diagonale Distanzen zu messen[1]), so weit es das Heliometer erlaubte, da es sonst unmöglich ist, aus dem Hauptnetz allein einen systematischen Fehler, mit dem eventuell eine der Distanzen behaftet ist, zu finden und dieser Distanz einen geringeren Einfluss auf das Netz zu geben. Solche systematischen Fehler haften offenbar den Messungen des Hauptnetzes an, da aus der Ausgleichung sich ein mittlerer Fehler der Gewichtseinheit ergibt, der den bedeutend übertrifft, welcher sich aus dem Vergleich der Einzelmessungen unter sich ergibt. Dieser beträgt im Mittel aus den oben angeführten Distanzen ± 0."12, während er sich aus der Ausgleichung zu ± 0."26 findet. Was die Ursache dieses schlechteren Zusammenstimmens ist, lässt sich nicht erkennen. Ich habe versucht zu finden, ob einem Sterne oder einer Distanz dieselbe zuzuschreiben ist, indem ich alle Distanzen, mit denen die übrigen Sterne an das Hauptnetz angeschlossen sind, mit berücksichtigt habe, nicht in strenger Ausgleichung, sondern durch versuchsweises Einzelrechnen. Es hat sich jedoch hierbei nichts auffälliges finden lassen. Etwas weniger gut stimmen die Distanzen nach dem Sterne f zusammen, und es ist möglich, dass hier kleine Fehler in den Messungen liegen.

Dies wäre umso eher erklärlich, als der Stern f in 20" Abstand einen schwächeren Begleiter hat, der bei den Messungen stets im Gesichtsfelde bleibt. Durch seine seitliche Lage auf der Netzhaut erschien sein Bild merklich heller, sein Vorhandensein ist mir bei den Messungen oft unangenehm aufgefallen. Eine Ursache eventuell vorhandener systematischer Fehler mag auch die verschiedene Helligkeit der Sterne des Hauptnetzes sein. Die äusseren Sterne haben bis auf zwei (h = 7.0, d = 6.5) die Helligkeit 8.5, der Centralstern dagegen ist 7.8 ter Grösse, so dass ich alle radialen Distanzen mit einer Blende habe messen müssen, während dies bei den Distanzen längs des Umfanges nur bei zwei Sternen der Fall war. Da die verwendeten Blenden Gitterblenden sind, so treten im Gesichtsfelde Beugungsbilder auf in Gestalt zweier senkrecht zu einander stehender Lichtstreifen, die bei der zu den radialen Distanzen ver-

1) Ich habe nachträglich noch einige solche Distanzen gemessen, doch konnten diese Beobachtungen, die auch noch zu gering an Zahl sind, hier nicht mehr mit berücksichtigt werden.

wendeten Blende ziemlich nahe an das Bild reichen (Erstes Bild für die *D*-Linie etwa in der Entfernung von 1'). Bei den Messungen der beiden helleren äusseren Sterne gegen die benachbarten kam eine engere Blende in Betracht, bei welcher die Beugungsbilder weiter vom Sterne entfernt liegen und daher sich weniger störend bemerkbar machen. Durch die verschiedene Richtung dieser Streifen gegen die Verbindungslinie der Sterne in den beiden Lagen der Messung mag die Beurteilung der Vertikalen im Gesichtsfelde verschieden beeinflusst, und dadurch die Messung mit einem systematischen Fehler behaftet werden. Wären z. B. in vorliegendem Falle sämtliche radialen Distanzen ein wenig zu kurz gemessen, so würde dies den auftretenden Unterschied in den mittleren Fehlern völlig erklären. Es sind zwar früher Untersuchungen über den Einfluss der Blenden auf die Distanzmessungen von Professor Schur gemacht worden, ohne ein Resultat zu liefern, doch sind hierbei vielleicht stärkere Blenden und sicher eine stärkere Vergrösserung angewendet worden, so dass die störenden Beugungserscheinungen weiter von dem Sterne fortrückten, und ihre Wirkung daher nicht so zur Geltung kam.

VII. Ableitung der Sternpositionen.

Aus den im vorigen Abschnitte gegebenen Distanzen wurden die Positionen der Sterne in folgender Weise abgeleitet. Zunächst wurde das Hauptnetz für sich ausgeglichen. Ausgehend von willkürlich angenommenen, aber schon sehr genähert richtigen Sternorten wurden die Distanzen zwischen den einzelnen Sternen gerechnet und zwar zur Kontrolle auch von dem Rechner der Sternwarte, Herrn Jastram, der mir auch sonst bei manchen Reduktionen behülflich war. Aus den Differenzen der gemessenen gegen die so gerechneten Distanzen wurden die Korrektionen an die angenommenen Sternkoordinaten abgeleitet. Es geschah dies, wie es auch sonst meist ausgeführt wird, durch Ausgleichung des Netzes in rechtwinkligen Koordinaten, wobei der Ort des Sternes *b* und die Declination des Sternes *f* als richtig vorausgesetzt wurden.

Es ergeben sich so 14 Bedingungsgleichungen mit 13 Unbekannten. An der Hand der folgenden Zusammenstellungen lassen sich die einzelnen Abschnitte der Rechnung leicht verfolgen.

Tabelle VI gibt zunächst die genäherten Orte der Sterne für 1855.0, ferner in Spalte 4 und 5 die für diese Orte aus der Ausgleichung folgenden Korrektionen und endlich die sich mit diesen ergebenden verbesserten Orte der Sterne des Hauptnetzes.

VI.
Die Sterne des Hauptnetzes.

Ausgangsorte der Hauptsterne für 1855.0			$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Verbesserte Orte für 1855.0	
f	5h25m 15.s110	−6°30′ 7.″90	−0.s126	0.″00	5h25m 14.s984	−6°30′ 7.″90
g	26 0.00	−5 26 50.0	−0.004	−0.68	25 59.996	−5 26 50.68
e	28 5.10	−6 39 50.0	−0.348	+1.43	28 4.752	−6 39 48.57
h	28 20.40	−4 27 48.0	−0.004	+2.85	28 20.396	−4 27 45.15
a	29 8.80	−5 44 40.0	−0.182	+2.05	29 8.618	−5 44 37.95
d	31 35.10	−6 39 40.0	−0.403	−1.83	31 34.697	−6 39 41.83
b	33 14.765	−4 30 9.″75	0.000	0.00	33 14.765	−4 30 9.75
c	33 46.20	−5 38 38.0	−0.164	−1.17	33 46.036	−5 38 39.17

Die folgende Tabelle VII enthält nach den ersten durch die Ueberschrift verständlichen Spalten in Spalte 6 und 7 die beobachteten, respektive mit den vorläufigen Oertern gerechneten Distanzen des Hauptnetzes, dann folgen deren Differenzen und schliesslich die für die Distanzen noch übrig bleibenden Fehler nach der Ausgleichung des Netzes.

VII.
Die Distanzen des Hauptnetzes.

Distanz	Epoche	Gemessene Distanz	Mittel	Wahre Distanz		Gerechnete Distanz	Beob.-Rech.	*v*.	*v. v.*
				in Skalenteilen	in Sekunden				
a—b	1902.87 4.97 3.92	144.s6098 6140	144.s6119 + 51	144.s6170	5786.″786	5786.″729	+ 0.″057	− 0.″068	0.0046
b—c	2.86 4.97 3.92	103.3475 3650	103.3563	103.3614	4135.960	4135.010	+ 0.950	+ 0.065	0.0042
a—c	2.86 4.97 3.92	103.8587 8652	103.8620	103.8671	4156.096	4156.262	− 0.066	− 0.044	0.0019
c—d	2.87 4.97 3.92	103.7967 7972	103.7970	103.8021	4153.594	4151.247	+ 2.347	+ 0.077	0.0052
a—d	2.88 4.97 3.93	98.8871 8946	98.8909	98.8960	3957.279	3955.948	+ 1.331	− 0.080	0.0064
d—e	2.87 4.97 3.92	78.1622 1702	78.1662	78.1713	3127.992	3128.745	− 0.753	+ 0.079	0.0062

Distanz	Epoche	Gemessene Distanz	Mittel	Wahre Distanz in Skalenteilen	Wahre Distanz in Sekunden	Gerechnete Distanz	Beob.-Rech.	v.	v. v.
a—e	1902.86 4.97 3.92	86.80808 0901	86.80852	86.80908	3444.″866	3443.″602	+ 1.″264	— 0.″017	0.0003
e—f	2.87 4.97 3.92	64.8571 8638	64.8605	64.8656	2595.568	2599.064	— 3.496	+ 0.076	0.0058
a—f	2.87 4.97 3.92	110.6112 6192	110.6152	110.6203	4426.425	4425.938	+ 0.487	— 0.114	0.0120
f—g	2.87 4.97 3.92	96.3633 3681	96.3657	96.3708	3856.233	3856.490	— 0.257	+ 0.090	0.0081
a—g	2.87 4.95 3.91	75.2476 2512	75.2494	75.2545	3011.276	3014.772	— 3.496	— 0.032	0.0010
g—h	2.87 4.98 3.93	102.9516 9577	102 9547	102.9598	4119.889	4116.768	+ 3.121	+ 0.089	0.0079
a—h	2.86 4.96 3.91	116.6713 6653	116.6683	116.6734	4668.634	4668.340	+ 0.294	— 0.080	0.0064
b—h	2.87 4.95 3.91	110.0580 0747	110.0663	110.0714	4404.460	4404.247	+ 0.213	+ 0.058	0.0034

Die Summe [v. v.] = 0.0702 und demnach der m. F. einer Distanz

$$= \pm \sqrt{\frac{0.0702}{14-13}} = \pm 0.''26.$$

Der m. F. einer Coordinate des Centralsterns ist

$$\pm \frac{0.''26}{\sqrt{4.68}} = \pm 0.''12.$$

Nimmt man an, dass sich die Gewichte der Coordinaten zweier Sterne verhalten wie die Anzahl der Distanzen, durch welche der Ort des Sternes bestimmt wird, so ergibt sich für die Coordinaten der übrigen Sterne des Hauptnetzes der m. F. zu

$$\pm 0.''12 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \pm 0.''18.$$

VIII.
Die Coefficienten der Normalgleichungen.

	x_d	y_d	x_e	y_e	x_g	y_g	x_h	y_h	x_c	y_c	x_f	x_a	y_a	n
x_d	+1.5280	−0.0400	−1.0000	−0.0040					+0.2230	−0.4160		−0.3050	+0.4600	+1.1190
y_d		+1.4740	−0.0040	0.0000					−0.4160	−0.7780		+0.4600	−0.6960	+3.1780
x_e			+2.0270	+0.0500							−0.9510	−0.0760	−0.2650	+3.0040
y_e				+0.9750							+0.2190	−0.2650	−0.9240	+0.4270
x_g					+1.1630	+0.2770	−0.2590	−0.4380			−0.0300	−0.3740	+0.3320	−1.6630
y_g						+1.8370	−0.4380	−0.7410			−0.1710	+0.3320	−0.1260	+4.2280
x_h							+1.2830	+0.2550				−0.0240	+0.1520	−1.3290
y_h								+1.7180				+0.1520	−0,9760	−2.9880
x_c									+1.2280	+0.3920		−0.9920	−0.0890	−1.1480
y_c									+1.7740		+1.6020	−0.0890	−0.0080	−1.1150
x												−0.6210	−0.4350	−3.0390
x_g												+3.2940	+0.3850	+3.1960
y													+3.7061	−3.5760

Tabelle VIII enthält die Coefficienten der Normalgleichungen für die Ausgleichung des Hauptnetzes. Die Grössen x und y entsprechen den Koordinatenverbesserungen $\Delta\alpha \cos\delta$ und $\delta\Delta$. (s. S. 40).

Nachdem so die Orte der Sterne des Hauptnetzes gefunden waren, wurden für willkürliche — aber meist bis auf 1" richtig angenommene — Koordinaten der übrigen Sterne die Korrektionen aus den 3 Anschlussdistanzen in entsprechender Weise bestimmt. Es seien hier nur die notwendigsten Daten gegeben. Tabelle IX enthält in der Spalte 2 die gemessenen Anschlussdistanzen für jeden Stern, in Spalte 3 und 4 die sich aus diesen ergebenden Koordinaten des Sternes und in Spalte 5 die für die 3 Distanzen noch übrig bleibenden Fehler.

IX.

Stern	Gemessene Distanzen	Ort für 1855.0		v	Stern	Gemessene Distanzen	Ort für 1855.0		v
		α	δ				α	δ	
k_{10} a	3459".927	5h27m14s.758	− 4° 54' 24".81	− 0".050	i_2 e	2293".202	5h28m5s.543	− 6° 1' 35".63	− 0".235
b	5575.061			+ 0.061	f	3065.667			+ 0.159
g	2243.536			+ 0.070	g	2808.412			− 0.197
b_9 a	4450.563	27 22.162	− 4 35 21.41	− 0.172	n_4 e	4228.823	28 9.187	− 5 29 20.37	− 0.105
h	5281.486			+ 0.120	h	3699.114			− 0.104
g	3324.138			+ 0.164	c	5059.858			+ 0.002
b_8 a	4725.279	27 32.605	− 4 29 35.78	− 0.115	i_3 e	1914.957	28 10.664	− 6° 7 55.51	+ 0.133
h	5116.642			+ 0.079	f	2938.689			− 0.086
g	3703.095			+ 0.114	g	3142.792			+ 0.120
n_9 e	3588.718	27 40.289	− 5 40 18.51	− 0.065	h_1 a	4229.295	28 11.567	− 4 35 35.48	− 0.089
h	4394.475			− 0.072	h	4545.114			+ 0.077
c	5460.359			+ 0.016	g	3649.868			+ 0.108
h_4 a	4795.061	27 48.242	− 4 27 16.01	− 0.308	h_2 a	4474.912	28 11.827	− 4 31 24.24	− 0.024
b	4885.770			+ 0.208	b	4530.577			+ 0.020
g	3923.316			+ 0.310	g	3865.971			+ 0.025
k_6 a	3461.560	27 55.293	− 4 49 54.41	− 0.198	k_1 a	3016.294	28 14.007	− 4 56 14.10	− 0.079
b	4920.650			+ 0.260	b	4760.208			+ 0.211
g	2806.613			+ 0.308	g	2716.560			+ 0.252
$i7_2$ e	1998.843	27 55.819	− 6 6 34.21	− 0.051	n_5 e	4136.969	28 15.687	− 5 30 54.55	+ 0.269
f	2783.621			+ 0.023	h	3789.779			+ 0.273
g	2944.351			− 0.036	c	4953.434			+ 0.008
n_{10} e	4894.169	27 58.271	− 5 18 15.40	− 0.050	n_6 e	4137.201	28 19.219	− 5 30 56.71	+ 0.288
h	3048.285			− 0.047	h	3791.308			+ 0.291
c	5334.909			+ 0.001	c	4900.871			+ 0.009
$i7_1$ e	2023.628	27 57.437	− 6 6 7.94	− 0.063	i_1 e	2368.526	28 20.458	− 6 0.31.43	+ 0.207
f	2817.849			+ 0.043	f	3287.064			− 0.168
g	2937.557			− 0.051	g	2911.531			+ 0.169
k_8 a	3902.900	28 3.257	− 4 41 39.24	− 0.098	n_x e	4680.135	28 23.673	− 5 21 57.16	− 0.410
h	4708.225			+ 0.100	h	3252.816			− 0.440
g	3277.617			+ 0.133	c	4916.349			+ 0.042

Stern	Gemessene Distanzen	Ort für 1855.0 α	Ort für 1855.0 δ	v	Stern	Gemessene Distanzen	Ort für 1855.0 α	Ort für 1855.0 δ	v
k_5 a	2983.514	5h 28m 24.232	− 4° 56′ 9.″46	− 0.″336	o_1 a	2845.055	5h 30m 27s.960	− 5° 1′ 31.″40	− 0.030
b	4614.495			+ 0.274	h	2782.625			− 0.187
g	2833.975			+ 0.225	c	3703.444			− 0.178
n_7 e	4127.866	28 24.246	− 5 31 11.02	− 0.063	o_2 a	3342.756	30 44.238	− 4 54 15.56	+ 0.044
h	3806.365			− 0.067	h	2674.929			− 0.290
c	4824.820			− 0.003	c	3804.016			− 0.302
k_2 a	2899.895	28 30.428	− 4 57 15.23	− 0.229	d_1 a	3121.168	30 57.923	− 6 28 59.55	+ 0.008
b	4550.684			+ 0.083	e	2660.876			− 0.025
g	2863.854			− 0.144	c	3925.656			− 0.024
a_1 d	4190.937	28 47.601	− 5 43 32.34	− 0.183	ds_a a	2550.316	31 14.803	− 6 13 18.32	− 0.153
e	3436.058			+ 0.107	c	3068.328			− 0.104
g	2695.321			− 0.140	d	1611.214			− 0.183
r_1 a	2270.326	28 54.919	− 6 22 18.90	− 0.143	o_3 a	2934.624	31 18.632	− 5 7 57.29	− 0.015
d	2599.850			− 0.179	h	3594.248			+ 0.350
f	3311.885			− 0.267	c	2870.572			+ 0.349
k_3 a	4402.342	28 55.754	− 4 31 19.80	− 0.001	ds_b a	2791.640	31 30.064	− 6 15 6.01	+ 0.161
b	3873.758			+ 0.002	c	2982.697			+ 0.167
g	4241.763			+ 0.003	d	1477.206			+ 0.218
a_2 d	3473.668	29 23.317	− 5 51 53.43	− 0.172	o_4 a	2985.834	31 54.506	− 5 16 50.45	− 0.019
e	3104.534			+ 0.085	h	4349.385			− 0.263
g	3386.756			− 0.145	c	2118.324			− 0.267
r_2 a	2911.615	29 27.266	− 6 32 56.21	− 0.044	d_2 a	3933.639	31 57.421	− 6 35 0.87	+ 0.219
d	1941.887			− 0.267	e	3478.882			− 0.231
f	3763.746			− 0.257	c	4749.888			− 0.207
m_2 d	2585.365	29 30.699	− 6 9 34.25	− 0.034	m_3 c	1999.420	31 59.895	− 5 58 59.29	− 0.034
e	2220.916			+ 0.108	d	2471.699			− 0.019
c	4237.378			+ 0.073	a	2696.981			− 0.043
m_1 d	2519.300	30 21.920	− 6 1 48.10	+ 0.027					
e	3063.095			− 0.070					
c	3847.666			− 0.065					

Beim Anschluss dieser Sterne an das Hauptnetz ergibt sich im Mittel der m. F. einer Distanz zu ± 0.″24, während er sich aus der inneren Uebereinstimmung der Einzelmessungen zu ± 0.″18 ergab. Der m. F. einer Koordinate ist demnach ± 0.17, wenn man vereinfachend annimmt, dass im Durchschnitt die drei Anschlussdistanzen normal, d. h. mit einem Abstande von 120° unter sich von den Sternen ausgehen. Da der m. F. einer Koordinate des Hauptnetzes ± 0.″18 ist, so wird derjenige der Koordinaten der übrigen Sterne durchschnittlich ± 0.″25, ohne Rücksicht auf die m. F. der Anhaltsterne.

Die gefundenen Orte der Sterne wurden von 1855.0 auf 1900.0 reduciert. Um die Orte der Fundamentalsterne und der Sterne *b* und *f* möglichst zur

Deckung zu bringen mit den Meridiankreisbestimmungen, wurde noch das ganze Netz einheitlich um + 0.s045 in Rektascension und − 0."05 in Declination verschoben. Die sich dann ergebenden definitiven Orte der Sterne sind in der Tabelle X enthalten.

X.

Definitive Orte für 1900.0.

Stern		B. D.	A. G. C.	α	δ	Orte
f	1	− 6.1212	1527	5h 27 26.s468	− 6° 27 55.97	03.9
g	2	− 5.1289	1626	28 12.586	− 5 24 41.72	03.9
k_{10}	3	− 4.1167	1636	29 27.911	− 4 52 20.74	04 2
h_3	4	− 4.1171	1638	29 35.649	− 4 33 17.81	03.9
h_6	5	− 4.1172	1640	29 46.192	− 4 27 32.99	04.0
n_9	6	− 5.1305	1642	29 52.637	− 5 38 16.04	04 4
h_4	7	− 4.1176	1646	30 1.868	− 4 25 14.11	03.8
$i7_2$	8	− 6.1233	1548	30 7.704	− 6 4 32.78	03.7
k_4	9	− 4.1179	1649	30 8.523	− 4 47 52.97	04.0
$i7_1$	10	− 6.1234	1550	30 9.337	− 6 4 6.58	03.7
n_{10}	11	− 5.1311	1652	30 11.004	− 5 16 14.15	04.4
e	12	− 6.1238	1552	30 16.051	− 6 37 47.70	03.9
k_6	13	− 4.1180	1651	30 16.631	− 4 39 38.34	04.2
i_2	14	− 6.1237	1553	30 17.515	− 5 59 35.11	03.7
n_4	15	− 5.1318	F. C.	30 21.736	− 5 27 19.95	(03.9)
i_6	16	− 6.1240	1555	30 22.524	− 6 5 55.06	03.7
h_1	17	− 4.1183	1663	30 25.055	− 4 33 35.12	03.7
h_2	18	− 4.1184	1664	30 25.380	− 4 29 23.90	03.7
k_1	19	− 4.1185	1665	30 27.126	− 4 54 13 88	03.8
n_8	20	− 5.1315	F. C.	30 28.208	− 5 28 54.49	(0.39)
n_6	21	− 5.1320	1668	30 31.728	− 5 28 56.79	03 7
i_1	22	− 6.1241	1557	30 32.446	− 5 58 31.59	(03.8)
h [1])	23	− 4 1186	1670	30 34 012	− 4 25 45.34	03.9
n_x	24			30 36.340	− 5 19 57.51	04.3
n_7	25	− 5.1326	1674	30 36.751	− 5 29 11.43	03.8
k_3	26	− 4.1187	1675	30 37.352	− 4 54 9.89	03.8
k_2	27	− 4.1188	1678	30 43.528	− 4 55 16.05	03.8
a_1	28	− 5.1330	1682	30 59.888	− 5 41 34.31	03.3
r_1	29	− 6.1247	1562	31 6.524	− 6 20 21.31	04.4
k_5	30	− 4.1190	1684	31 9.306	− 4 29 22.34	03.8
a	31	− 5.1334	1687	31 20.884	− 5 42 41.29	03.9
a_7	32	− 5.1336	1564	31 35.454	− 5 49 57.70	03.6
r_2	33	− 6.1254	1565	31 38.681	− 6 31 0.69	04.4
m_2 [2])	34	− 6.1255	1566	31 42.525	− 6 7 39.07	04.1
m_1	35	− 6.1262	1574	32 33.880	− 5 59 56.19	03.9
o_1	36	− 5.1342	1700	32 40.978	− 4 59 39.91	04.2
o_2	37	− 4.1196	1702	32 57.382	− 4 52 25.13	04.2
d_1	38	− 6.1269	1579	33 9.400	− 6 27 9.98	04.2
d_{6a}	39	− 6.1271	1581	33 26.556	− 6 11 27.87	04.5
o_7	40	− 5.1347	1707	33 31.534	− 5 6 9.18	04.3
d_{6b}	41	− 6.1274	1582	33 41.784	− 6 13 18.53	04.2
d	42	− 6.1275	1584	33 45.983	− 6 37 54.66	03.9
n_4	43	− 5.1351	1716	34 7.250	− 5 15 4.61	04.3
d_2	44	− 6.1277	1587	34 8.788	− 6 33 15.15	04.2
m_3	45	− 5.1353	1589	34 11.898	− 5 57 13.79	04 3
h	46	− 4.1210	1728	35 28.324	− 4 28 29.18	03.9
c	47	− 5.1359	1732	35 58 390	− 5 37 0.60	03.9

Anmerkung. Bei den 3 Fundamentalsternen sind die Oerter mit den Auwers'schen E. B. der F. C. Sterne auf die Epoche 1900.0 reduziert, was durch Einklammerung d. Epochenzahl angedeutet ist.

1) h comes sequ. mg 10. Dist. 4."64, P. W. 59°.5.

2) m_2 comes praec. mg 9.5 Dist. 5."02 P. W. 283°.2.

6*

VIII. Vergleich mit früheren Beobachtungen.

Die Differenzen der soeben abgeleiteten Oerter der Sterne gegen die aus früheren Beobachtungen gefundenen sind in den folgenden Tabellen zusammen gestellt. Der Centralstern ($\Theta = n_4$), auf welchen sich die früheren Beobachtungen meist beziehen, ist mit der Eigenbewegung $+0.^s0003$ und $+0.''005$ reduciert worden und die beiden Fundamentalsterne n_8 und i_1 mit den Eigenbewegungen $+0.^s0008$ und $+0.''014$ respective $+0.^s0005$ und $-0.''004$. Die Orte der Sterne wurden dann für jede einzelne der früheren Vermessungen gemeinsam so verschoben, dass sich die Orte der vorkommenden Fundamentalsterne möglichst mit den von mir gefundenen deckten.

Die Vergleichungen mit dem A. G. Kataloge, sowie mit den in der Einleitung erwähnten Beobachtungen von Bond, Struve, Herschel und Lassell sind in der folgenden Tabelle XI. enthalten.

XI.

Die Vergleichung mit anderen Beobachtungen.

Stern	M – A. G. C.		M—Bond.		M—Struve		M – Herschel		M—Lassell	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	s	"	s	"						
f	− 0.062	− 0.05	− 0.03	+ 3.1						
g	− 0.084	+ 0.42	− 0.04	− 1.3			+ 0.24	+ 3.0		
k_{10}	+ 0.011	+ 1.46	+ 0.10	− 3.3						
h_6	− 0.021	+ 1.59	+ 0.05	+ 2.1						
h_9	− 0.008	+ 1.10	− 0.05	+ 1.0						
n_9	− 0.083	− 1.60	− 0.16	+ 0.6	+ 0.10	+ 1.3	+ 0.63	− 1.4		
h_4	− 0.072	+ 0.49	− 0.12	+ 2.2						
k_6	+ 0.013	+ 0.53	+ 0.04	+ 1.5			− 0.07	+ 3.2		
$i7_2$	− 0.006	+ 0.42	+ 0.06	+ 3.4						
n_{10}	− 0.146	+ 1.15	− 0.03	− 0.9	− 0.03	− 0.9	+ 0.24	+ 2.5	− 0.5	+ 1.8
$i7_1$	− 0.021	+ 0.52	− 0.06	− 0.9						
k_8	− 0.109	+ 0.36	− 0.17	+ 1.1						
e	− 0.019	+ 0.40	− 0.13	+ 3.7						
i_2	− 0.045	+ 0.49	+ 0.01	+ 0.7						
n_4	+ 0.010	+ 0.14	+ 0.01	− 1.7	+ 0.02	+ 1.1	+ 0.17	+ 1.0	− 0.02	+ 1.4
i_6	+ 0.004	− 0.26	+ 0.09	+ 1.6						
h_1	− 0.005	+ 1.48	− 0.11	+ 1.5						
h_3	+ 0.020	+ 1.00	+ 0.13	− 0.3						
k_1	− 0.034	− 0.48	+ 0.02	+ 0.7			− 0.12	− 0.7		
n_5	+ 0.005	− 0.25	− 0.01	0.0	− 0.02	− 1.1	− 0.16	− 1.1	+ 0.03	− 1.4
n_6	− 0.012	+ 0.61	− 0.04	+ 2.3	− 0.01	− 0.2	+ 0.21	+ 0.4	− 0.11	+ 1.5
h	+ 0.032	+ 0.56	− 0.04	+ 0.3						
i_1	+ 0.007	+ 0.20	− 0.01	+ 1.8						
n_x			+ 0.01	− 0.7	− 0.02	− 1.4	+ 0.31	+ 1.6	+ 0.38	+ 3.4
k_3	+ 0.022	− 0.19	+ 0.04	− 2.0			+ 0.72	− 11.0		

Stern	M—A. G. C.		M—Bond.		M—Struve		M—Herschel		M—Lassel	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	s	″	s	″						
n_7	− 0.049	+ 0.87	+ 0.01	+ 0.1	+ 0.02	− 0.2	+ 0.32	+ 0.3	0.00	+ 2.6
k_2	− 0.002	+ 1.45	− 0.08	+ 2.4			− 0.50	− 3.0		
a_1	− 0.042	+ 0.59	− 0.12	+ 2.6	− 0.01	+ 1.4	+ 0.57	− 0.3		
r_1	− 0.036	− 0.11	− 0.22	+ 3.4						
h_9	+ 0.016	+ 0.56	− 0.03	− 1.5						
a	− 0.026	+ 0.01	− 0.09	+ 0.6	− 0.07	− 0.6	− 0.07	− 0.6	+ 0.09	− 2.0
a_2	− 0.086	+ 0.20	− 0.09	+ 3.3					+ 2.23	+ 3.8
r_2	− 0.029	− 0.29	00	+ 4.4						
m_2	− 0.025	+ 0.43	− 0.02	+ 1.8						
m_1	0.000	+ 0.61	+ 0.05	+ 1.2						
o_1	+ 0.028	− 0.01	− 0.11	− 2.0						
o_2	+ 0.022	+ 0.37	+ 0.07	− 1.3						
d_1	− 0.030	− 1.18	− 0.04	− 4.9						
da_a	− 0.054	+ 1.83								
o_3	+ 0.024	+ 0.27								
da_b	− 0.076	− 0.23								
d	− 0.037	− 0.86								
o_4	+ 0.030	− 1.11								
d_2	+ 0.006	− 0.35								
m_3	− 0.062	− 0.59								
b	+ 0.044	− 0.05								
c	− 0.050	− 3.00								

Die Differenzen stimmen im Allgemeinen nur schlecht zusammen, und dem entsprechend haben auch die Eigenbewegungen, die sich aus ihnen für die Sterne ableiten lassen und die in der folgenden Tabelle XII. gegeben werden, nur geringen Wert. Höchstens zwischen den aus dem A. G.-Kataloge und den Messungen von Bond abgeleiteten Bewegungen ist eine gewisse Parallelität zu erkennen.

XII.

Eigenbewegungen in 0^s.001 und 0.″01 als Einheiten.

Stern	M—A. G. C.		M—Bond		M—Struve		M—Herschel		M—Lassel	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
f	− 7.0	− 0.6	− 0.7	+ 7.2						
g	− 7.0	+ 3.5	− 1.0	− 3.0			+ 3.5	+ 4.4		
k_{10}	+ 0.9	+ 12.2	+ 2.3	− 7.6						
h_6	− 3.5	+ 27.0	+ 1.1	+ 4.8						
h_8	− 0.7	+ 9.2	− 1.2	+ 2.3						
n_9	− 6.7	− 12.9	− 3.8	+ 1.3	+ 1.9	+ 2,4	+ 8.3	− 2.0		
h_4	− 5.5	+ 3.7	− 2.8	+ 5.1						
k_6	+ 1.1	+ 4.4	+ 0.9	+ 3.4			− 1.0	+ 4.7		
$i7_3$	− 0.7	+ 5.0	+ 1.4	+ 7.8						

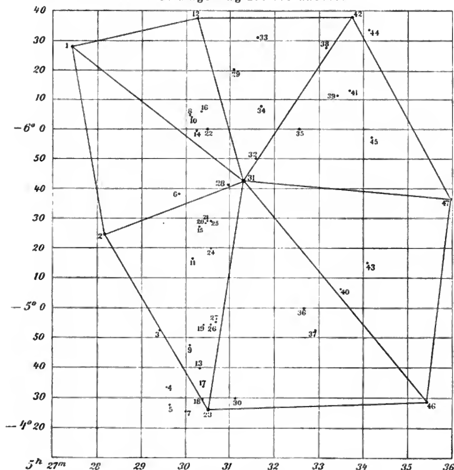
Stern	M—A. G. C.		M—Bond		M—Struve		M—Herschel		M—Lassel	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
n_{10}	−11.8	+ 9.4	−0.7	− 2.1	−0.6	−1.7	+ 3.5	− 3.7	−3.0	+3.6
$i?_1$	− 2.7	+ 6.7	−1.4	− 2.1						
k_8	− 9.0	+ 3.0	−4.1	+ 2.5						
e	− 2.4	+ 5.1	−3.1	+ 8.5						
i_2	− 6.2	+ 6.8	+0.2	+ 1.6						
n_4			+0.3	− 3.9	+0.4	+2.1	+ 2.5	+ 1.5	−0.4	+2.8
i_6	+ 0.6	− 3.9	+2.1	− 3.7						
h_1	− 0.4	+12.7	−2.6	+ 3.4						
h_2	+ 1.7	+ 8.5	+3.0	− 0.8						
k_1	− 2.9	− 4.1	+0.4	+ 1.4			− 1.8	− 1.0		
n_5			−0.2	0.0	−0.4	−2.1	− 2.3	− 1.6	+0.6	−2.8
n_6	− 1.1	+ 5.7	−1.0	+ 5.3	+0.2	−0.4	+ 3.1	− 0.6	−2.2	+3.0
h	+ 2.5	+ 4.4	−1.0	+ 0.6						
i_1			−0.2	+ 3.7						
n_x			+0.2	− 1.7	−0.4	−2.6	+ 4.5	+ 2.3	+7.6	+6.8
k_3	+ 1.9	− 1.6	+0.9	− 4.7			+10.5	−16.2		
n_7	− 8.6	+15.2	+0.2	+ 0.2	+0.4	−0.4	+ 4.7	+ 0.4	0.0	+5.2
k_9	− 0.2	+12.4	−1.9	+ 5.5			− 7.3	− 4.4		
a_1	− 3.8	+ 5.2	−2.8	+ 6.0	−0.2	+2.6	+ 8.4	− 0.4		
r_1	− 4.3	− 1.3	−3.1	+ 7.8						
h_3	+ 1.4	+ 4.8	−0.7	− 3.5						
a	− 2.2	+ 0.1	−2.1	+ 1.3	−1.3	−1.2	− 1.3	− 2.9		
a_2	−12.1	+ 2.8	−2.1	+ 7.6			+32.8	+ 5.6		
r_2	− 4.0	− 4.0	0.0	+10.0						
m_2	− 2.5	+ 4.3	−0.5	+ 4.1						
m_1	0.0	+ 6.5	+1.1	+ 2.7						
o_1	+ 2.1	− 0.1	−2.6	− 4.7						
o_2	+ 1.7	+ 2.8	+1.6	+ 2.0						
d_1	− 3.5	−13.8	−1.0	−11.4						
ds_a	− 6.3	+21.5								
o_3	+ 1.9	+ 2.5								
ds_b	− 6.5	− 2.0								
d	− 5.3	−12.3								
o_4	+ 2.2	− 8.0								
d_2	+ 0.9	− 3.8								
m_3	− 8.5	− 8.1								
b	+ 3.0	− 0.3								
c	− 3.7	−22.4								

Der m. F. einer mit Hülfe des A. G.-Kataloges abgeleiteten Eigenbewegung ist etwa $\pm 0.''56$. Als besonders grosse Eigenbewegungen wären zu bemerken diejenigen von $k_{10}\,\delta$, $k_8\,\delta$, $n_9\,\delta$, $n_{10}\,\alpha$, $k_8\,\alpha$, $h_1\delta$, $n_7\alpha$ und δ, $k_9\delta$, $a_2\,\alpha$, $d_1\,\delta$, $ds_a\,\delta$, $d\,\delta$, $m_3\,\alpha$ und $c\,\delta$, welche meist auch durch die anderen Beobachtungen wenigstens dem Vorzeichen nach bestätigt werden.

Die im übrigen geringe Uebereinstimmung der Eigenbewegungen untereinander lässt es nicht zu, aus ihnen weitere Schlüsse zu ziehen. Würde man den mit Hülfe des A. G.-Kataloges abgeleiteten Eigenbewegungen reellen Wert beilegen, so würde sich aus ihnen eine Drehung des ganzen Gebietes um den Nebel

in positivem Sinne und eine geringe Bewegung in der Richtung der abnehmenden Rektascension folgern lassen. Diese Bewegungen sind aber, wie gesagt, so unsicher bestimmt, dass ihr Ursprung wohl systematischen Fehlern der Beobachtungen zugeschrieben werden kann.

Karte der Umgebung des Orionnebels.






U.C. BERKELEY LIBR
C038111645

